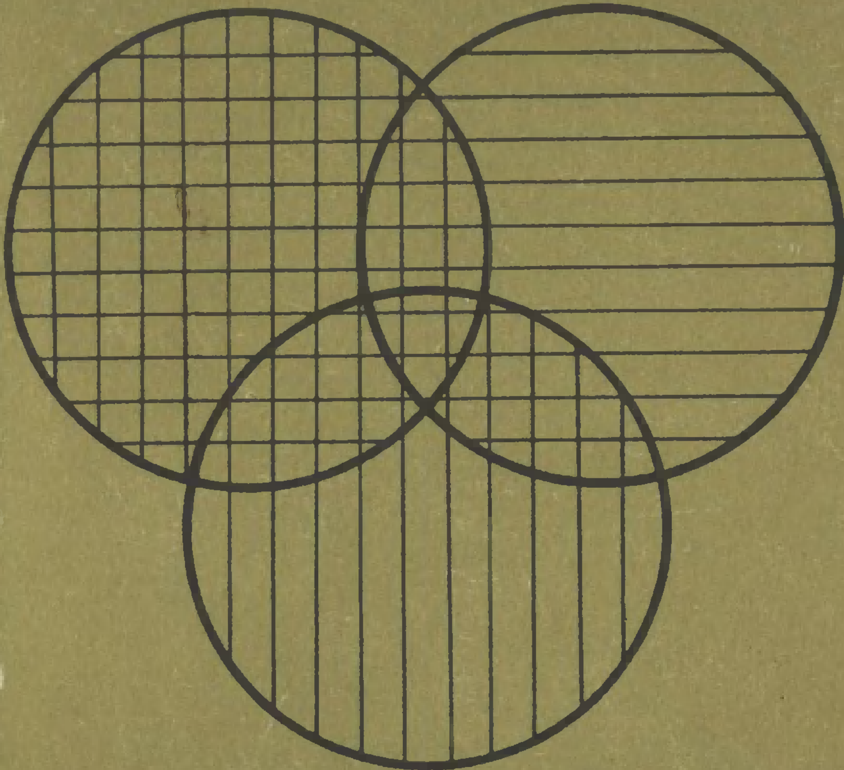
ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ КУРС



МАТЕМАТИКА

9

Дополнительные главы по курсу МАТЕМАТИКИ 9 класса для факультативных занятий

Пособие для учащихся

СБОРНИК СТАТЕЙ

Составитель *П. В. СТРАТИЛАТОВ*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»
Москва 1970

Стратилатов П. В.

С-83 Дополнительные главы по курсу математики 9 класса для факультативных занятий. Пособие для учащихся. Сост. П. В. Стратилатов. М., «Просвещение», 1969.

143 с. 17 к. 300 тыс. экз.

Книга состоит из статей, содержащих теоретический учебный материал и набор упражнений по темам факультативных курсов по математике для девятых классов.

6-6
347-70

51(075)

Предисловие

В настоящем учебном году всем школам рекомендовано проводить факультативные занятия по математике начиная с 7-го класса. Для девятых классов рекомендованы следующие темы:

1.	Множества и операции над ними	12 *ч*.
2.	Производная	36 *ч*.
3.	Натуральные числа и принцип математической индукции	12 *ч*.
4.	Численные методы решения уравнений	12 *ч*.
5.	Геометрические преобразования	12 *ч*.
6.	Решение задач по общему курсу	10 *ч*.

Факультативные занятия рассчитаны на 2 *ч* в неделю, в общей сложности 70 *ч* за учебный год. Предполагается, что 1-я и 2-я темы будут прослушаны всеми учащимися — участниками факультативного курса по математике за 9-й класс. Из 3-й, 4-й и 5-й тем будет выбрана одна (на 12 *ч*) по выбору преподавателя и, наконец, последняя тема, 6-я, решение задач также будет охватывать всех участников занятий.

Предлагаемый сборник для факультативных занятий с учащимися 9-го класса содержит следующие материалы:

1. Множества и операции над ними.

2. Принцип математической индукции и применение его к решению задач.

3. Геометрические преобразования.

В сборник не вошла 2-я тема факультативных занятий. По этому вопросу имеется достаточно обширная литература: а) Кочетков Е. С. и Кочеткова Е. С. „Алгебра и элементарные функции", учебник для IX—X классов (ч. 2); б) А. И. Маркушевич, К. П. Сикорский, Р. С. Черкасов, „Алгебра и элементарные функции", 1968; в) Колмогоров А. Н. „Функции, графики, непрерывные функции". „Математика в школе", № 6 за 1965 г.; г) Зельдович Я. Б. „Высшая математика для начинающих и ее приложения в физике", 1965; д) Привалов И. И., Гальперн С. А. „Основы анализа бесконечно малых", 1966.

В последней книге приведены очень хорошо подобранные упражнения для усвоения основных понятий.

В сборнике не приводится специального набора задач. Много упражнений имеется в публикуемых работах по первым двум темам (о множествах и о методе математической индукции). Соответствующие задачи учитель может взять из публикуемых в журнале „Математика в школе" (отдел задач), а также использовать сборники задач Моденова П. С., Шахно К. У., Розова Н. Х. и Потапова В. Г.; Васильева Н. Б. и Егорова А. А. (под ред. академика А. Н. Колмогорова) и другие сборники для подготовки к математическим олимпиадам и для поступления в вузы и втузы.

П. Стратилатов

МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

С. В. Суворов,
А. А. Шершевский

В научно-популярной математической литературе большое внимание уделено свойствам бесконечных множеств. Знакомство с понятием эквивалентности множеств, мощности множества и т. д. рекомендуется и программой факультативных занятий по математике в школе. У теории множеств есть, однако, более элементарная часть, в которой различие между конечными и бесконечными множествами не выступает явно. Это в первую очередь «алгебра множеств», в которой изучаются свойства операций над множествами. Как мы увидим, она ближе к проблематике школьной алгебры.

В настоящей работе вводятся основные определения, терминология и символика теории множеств, и на хорошо известном школьном материале показано применение этих понятий. Язык теории множеств позволяет взглянуть с более общих позиций на такие важные разделы школьного курса математики, как решение уравнений, неравенств и др., и способствует устранению устойчивых логических ошибок, встречающихся часто при изучении этих тем в средней школе.

Материал, изложенный в данной статье, рассчитан на 12 часов. § 8 может быть пропущен при первом чтении; дальнейшее изложение не опирается на его содержание. Заметим, что задачи § 11 можно решать на протяжении всех двенадцати часов по мере прохождения материала.

§ 1. Множество, элемент множества. Принадлежность, включение, подмножество, равенство множеств

Прежде всего мы познакомимся с тем, что такое множество.

Мы будем считать *множество* одним из первоначальных понятий, не подлежащих формальному определению. Достаточно привести примеры множеств: множество учащихся в классе, множество книг в библиотеке, множество точек на плоскости, множество целых чисел, множество решений уравнения $x^2-5x+6=0$.

Предметы любой природы, составляющие множество, называются его *элементами*. Вводятся следующие обозначения:

1) $A=\{a;\ b\}$ — множество A состоит из элементов a, b; 2) $a \in A$ — элемент a принадлежит множеству A. Например, если множество рациональных чисел обозначить буквой R, то тот факт, что число 8 рациональное, записывается следующим образом: $8 \in R$; 3) $a \overline{\in} A$ — элемент a не принадлежит множеству A. Например, известно, что число $\sqrt{3}$ иррациональное, т. е. $\sqrt{3} \overline{\in} R$.

В каком случае можно считать, что множество задано?

Для этого достаточно было бы перечислить все элементы множества. Однако это возможно только в том случае, когда множество содержит конечное число элементов (но и это не всегда удобно, если число элементов очень велико).

Множество можно было бы также задать и его описанием, т. е. указанием характеристического признака, позволяющего относительно любого объекта однозначно судить, принадлежит он данному множеству или нет.

Например, элементы множества однозначных простых чисел нетрудно явно перечислить: $A=\{2;\ 3;\ 5;\ 7\}$. А выписывание элементов множества всех четных четырехзначных чисел хотя и возможно, но слишком трудоемко. Множество всех чисел, кратных шести, бесконечно, и выписать все его элементы невозможно; оно состоит из чисел вида $6k$, где k — любое целое число.

Множество всех простых чисел определяется описанием с помощью следующего характеристического признака: этому множеству принадлежат те и только те числа, которые имеют два делителя — самого себя и единицу.

Однако формулировка некоторого характеристического свойства еще не гарантирует существование объектов, которые этим свойством обладают, т. е. возможно, что множество, задаваемое этим свойством, не будет содержать ни одного элемента. Такое множество называется *пустым* и обозначается символом $\varnothing$. Например, если все ученики IXА класса успевают по всем предметам, то при подведении годовых итогов в классном журнале в графе «количество неуспевающих» проставляется число 0, а множество неуспевающих учеников этого класса оказывается пустым. Пустым также, к примеру, является множество чисел, делящихся на 2 и на 3, но не делящихся на 6.

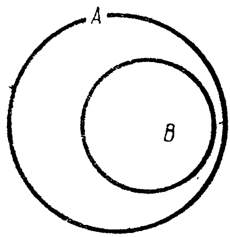
Непосредственным обобщением понятия принадлежности элемента a множеству A является *включение* множества A в множество B. Говорят, что множество A включено в множество B (A содержится в B), если каждый элемент множества A принадлежит множеству B. Множество A называется *подмножеством* множества B, обозначают это так: $A \subseteq B$. Например, множество целых чисел C является подмножеством множества рациональных чисел R; т. е. $C \subseteq R$. Если одновременно с отношением $A \subseteq B$ имеет место факт включения множества B в множество A ($B \subseteq A$), то оба множества попросту совпадают, т. е. состоят из одних и тех же элементов. Равенство или совпадение множеств обозначается так: $A = B$. Для принадлежности некоторого элемента множеству A в этом случае необходима и достаточна принадлежность его множеству B. Пусть, например, каждая книга ученика Иванова есть и у ученика Петрова. Однако этого еще недостаточно, чтобы утверждать, что их домашние библиотеки совершенно одинаковы. Но если сверх того известно, что каждая книга Петрова есть и в библиотеке Иванова, то отсюда с необходимостью вытекает, что их библиотеки тождественны.

Из определения равенства множеств непосредственно следует, что порядок, в котором перечисляются элементы множества, несущественен, а важен лишь состав множества. Например, множества $A=\{2;\ 3;\ 5\}$, $B=\{3;\ 2;\ 5\}$ и $C=\{5;\ 3;\ 2\}$ равны между собой, т. е. представляют собой одно и то же множество.

Если каждый элемент непустого множества A принадлежит множеству B, но хотя бы один элемент множества B не принадлежит множеству A, то A называется *собственным подмножеством* множества B, и это записывается так: $A \subset B$ (сравните с обозначением строгого и нестрогого неравенства).

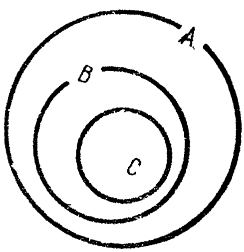
Таким образом, из факта $A \subset B$ вытекает, что $A \subseteq B$, но из того, что $A \subseteq B$ следует лишь, что имеет место одно из двух соотношений: $A \subset B$ или $A = B$.

Так как мы ввели в рассмотрение пустое множество, т. е. множество, не содержащее ни одного элемента, то мы будем считать, что все пустые множества равны между собой, и каждое пустое множество является подмножеством любого другого множества, пустого или непустого



Черт. 1

Введенные в этом пункте понятия и отношения наглядно иллюстрируются с помощью так называемых кругов Эйлера Множество изображается некоторым кругом, а его элементы — точками этого круга. На чертеже 1 изображен следующий факт: $B \subset A$.



Черт. 2

И в заключение этого параграфа заметим, что выделение некоторого понятия из более общего указанием дополнительных признаков есть по существу рассмотрение некоторого подмножества данного множества.

Так, требование равенства двух сторон выделяет из множества треугольников A подмножество равнобедренных треугольников B, а требование равенства основания и боковой стороны выделяет из множества равнобедренных треугольников B подмножество равносторонних треугольников C Отношение между множествами A, B и C проиллюстрировано на чертеже 2.

§ 2. Числовые множества; множества точек на прямой, задаваемые алгебраическими уравнениями и неравенствами с одним переменным

В этом разделе мы рассмотрим конкретные примеры множеств, возникающих при решении уравнений и неравенств с одним переменным, таким образом, мы будем рассматривать различные подмножества множества всех действительных чисел. В геометрической интерпретации это будет соответствовать различным множествам точек числовой оси.

При решении линейных уравнений вида $ax+b=0$ возможны три случая: 1) уравнение имеет единственное решение; 2) не имеет решений; 3) уравнение является тождеством. Так, например, уравнению $2x+4=0$ удовлетворяет число $x=-2$, уравнение $2(x-1)=2x+2$ не имеет решений, а корнем уравнения $2(x-1)=2x-2$ является любое число. В последнем случае говорят, что множеством решений этого уравнения является вся числовая ось.

Рассмотрим уравнение $x^2-5x+6=0$.

Оно имеет два корня: $x_1=2$ и $x_2=3$, и мы будем говорить, что множество корней данного уравнения состоит из чисел 2 и 3 (можно сказать — из двух элементов: 2 и 3). Это множество обозначается следующим образом: $\{2;\ 3\}$. Аналогично множество решений уравнения $(x-1)\cdot(x-2)^2\cdot(x+3)^3=0$ состоит из трех чисел, или из трех элементов: $\{1;\ 2;\ -3\}$.

Рассмотрим уравнение $x^2+1=0$. Оно не имеет корней. И для того чтобы мы всегда имели возможность говорить о множестве решений алгебраического уравнения, используем введенное выше так называемое *пустое множество*, которое не содержит ни одного элемента (в нашем случае ни одного числа). Таким образом, множество решений уравнения $x^2+1=0$ пусто.

Уравнению $x=|x|$ удовлетворяют все неотрицательные числа, это множество геометрически изображается полупрямой. Говорят, что это «замкнутая полупрямая», так как точка с абсциссой нуль принадлежит множеству решений данного уравнения.

Упражнения

1. Каково множество решений каждого из уравнений: $x^2-1=0$; $x^2-2x+1=0$; $x^2+x+1=0$; $|x|+x=0$? Дайте в каждом случае геометрическую иллюстрацию.

2. Приведите примеры уравнений, множество решений которых соответственно пусто, содержит один, два или три элемента.

Можно говорить и о множестве решений неравенства. Пусть, например, дано неравенство $2x+4>0$. Решением его является любое число, большее -2 $(x>-2)$. Это множество решений изображается открытой (незамкнутой) полупрямой. Множество решений неравенства $x+5<x-5$ пусто.

Неравенству $x+5>x+3$ удовлетворяют все числа. Геометрически это множество изображается всей числовой прямой. Множество решений двойного неравенства $0<2x-4<8$ (по существу системы) составляют все числа, большие 2, но меньшие 6 $(2<x<6)$. Заметим, что множество всех чисел x, удовлетворяющих неравенству $a<x<b$, называется *интервалом* и записывается следующим образом: $(a; b)$. Круглые скобки означают, что точки $x=a$ и $x=b$ не входят в рассматриваемое множество (черт. 3); нужно отличать интервал $a<x<b$ (открытое множество точек) от сегмента $a\leqslant x\leqslant b$ (замкнутого множества точек); сегмент $a\leqslant x\leqslant b$ обозначают $[a; b]$ (черт. 4).

Черт. 3

Черт. 4

Известный интерес представляют множества, задаваемые уравнениями и неравенствами, содержащими неизвестное под знаком абсолютной величины.

Мы напомним прежде всего, как вводится в алгебре понятие абсолютной величины и как оно интерпретируется геометрически.

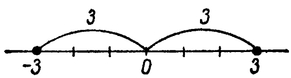
Положение точки на прямой определяется ее координатой, т. е. расстоянием точки от начала отсчета, взятым со знаком плюс, если точка расположена правее нуля, и со знаком минус, если точка расположена левее нуля.

Точка с координатой $x=3$ расположена на расстоянии трех единиц от нуля (справа).

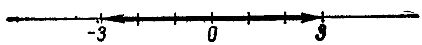
Точка с координатой $x=-3$ также расположена на расстоянии трех единиц от нуля (слева). Таким образом, расстояние до нуля от точки $x=3$, лежащей правее начала отсчета, равно координате точки, а расстояние до нуля от точки $x=-3$, лежащей левее начала отсчета, отличается от координаты этой точки только знаком. Итак, расстояние от точки с координатой x до начала отсчета всегда совпадает с абсолютной величиной числа x, задаваемой формально следующим определением:

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x<0. \end{cases}$$

Условие $|x|=3$ можно истолковывать геометрически следующим образом: расстояние от точки до начала отсчета равно трем единицам. Таких точек на оси две: $x_1=3$ и $x_2=-3$ (см. черт. 5). Условие $|x|<3$ приоб-



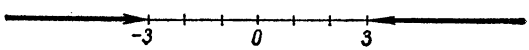
Черт. 5



Черт. 6

ретает следующий геометрический смысл: расстояние от точки до начала отсчета меньше трех единиц, т. е. точка лежит в интервале $(-3;\ 3)$ и ее координата удовлетворяет двойному неравенству $-3<x<3$ (черт. 6).

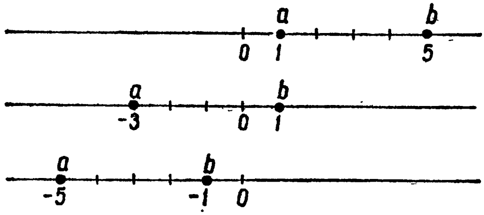
Условие $|x|>3$ выражает требование, чтобы расстояние от точки до начала отсчета было больше трех единиц. Это имеет место для точек, лежащих вне сегмента $[-3;\ 3]$, т. е. левее точки -3 $(x<-3)$ или правее точки 3 $(x>3)$ (черт. 7).



Черт. 7

С помощью символа абсолютной величины легко выражается расстояние между двумя точками с произвольными координатами $x=a$ и $x=b$.

Если $b>a$, то это расстояние равняется разности $b-a$. В этом легко убедиться, рассматривая различные случаи на чертеже 8. Например, если $b=1$ и $a=-3$, то $b-a=1-(-3)=4$, что соответствует чертежу. Если же $a=-5$ и $b=-1$, то $b-a=-1-(-5)=4$, что также справедливо.



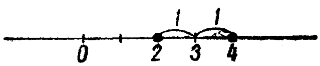
Черт. 8

Проверьте самостоятельно на примерах, что если $a>b$, т. е. точка с координатой a расположена правее точки с координатой b, то расстояние между этими точками равно $a-b$.

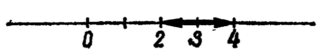
Оба полученных результата можно объединить следующим образом: расстояние между точками с координатами $x=a$ и $x=b$ равно $|a-b|=|b-a|$.

Приведенное выше геометрическое истолкование модуля разности двух чисел позволяет легко решать уравнения и неравенства, содержащие неизвестное под знаком абсолютной величины.

Условие $|x-3|=1$ истолковывается геометрически следующим образом: расстояние от точки x до точки 3 равно единице. Таких точек на прямой две: $x_1=2$ и $x_2=4$



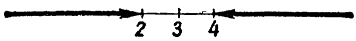
Черт. 9



Черт. 10

(черт. 9). Таким образом, множество решений уравнения $|x-3|=1$ имеет вид: $M=\{2;\ 4\}$.

Если $|x-3|<1$, то соответствующие точки находятся от точки 3 на расстоянии, меньшем единицы (черт. 10). Множество M решений этого неравенства можно записать в виде: $M=(2;\ 4)$. Неравенством $|x-3|>1$ задается множество точек, расположенных вне сегмента $[2;\ 4]$ (черт. 11). Это множество состоит из двух открытых лучей $(-\infty; 2)$ и $(4; +\infty)$ или, как говорят, получается их объединением. В заключение этого пункта дадим геометрическое решение следующего уравнения: $|x+3|=|x-1|$. Надо найти точку, одинаково удаленную от точки -3 и от точки 1. Это будет середина отрезка



Черт. 11

Черт. 12

$[-3; 1]$, т. е. точка $x=-1$ (черт. 12). Итак, в этом случае множество M решений уравнения содержит только один элемент: $M=\{-1\}$.

Упражнения

3. Найти множество решений следующих уравнений и неравенств, используя геометрическую интерпретацию понятия абсолютной величины:

а) $2|x+1|=|x-2|$, ответ: $\{0; -4\}$;
б) $|x-1|+|x-5|=4$, ответ: $[1; 5]$;
в) $|x-1|+|x-5|=6$, ответ: $\{0; 6\}$;
г) $|x-1|+|x-5|=2$, ответ: $\varnothing$;
д) $|x-2|>|x|$, ответ: $(-\infty; 1)$;
е) $||x-5|-|x-1||<2$, ответ: $(2; 4)$.

Примечание. Множество M элементов x, обладающих некоторым свойством, например $a \leqslant x \leqslant b$, обозначается так: $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$. Используя это стандартное обозначение, можно было бы задать множества решений всех рассмотренных выше уравнений и неравенств. Так, множество решений $(-\infty; 1)$ неравенства $|x-2|>|x|$ есть $\{x \mid x<1\}$.

§ 3. Операции над множествами

Часто в курсе алгебры мы сталкивались с такой ситуацией, когда решение некоторого алгебраического уравнения или неравенства сводилось к решению других более простых уравнений или неравенств. Мы рассмотрим несколько примеров подобного рода, имея в виду установить связь между множеством решений данного уравнения или неравенства и множествами решений тех уравнений или неравенств, к которым оно сводилось.

Пусть требуется решить уравнение $(x^2-x)(x^2-3x+2)=0$. Чтобы произведение было равно нулю, необходимо и достаточно, чтобы обращался в нуль хотя бы один из сомножителей. Имеем: 1) $x^2-x=0$ ИЛИ 2) $x^2-3x+2=0$.

Связка ИЛИ здесь употреблена в неразделительном смысле, т. е. не исключается одновременное обращение в нуль обоих сомножителей.

Множество решений уравнения $x^2-x=0$ есть $M_1=\{0;\ 1\}$, множество решений уравнения $x^2-3x+2=0$ есть $M_2=\{1;\ 2\}$. Множество решений исходного уравнения состоит из всех чисел, входящих хотя бы в одно из множеств M_1 ИЛИ M_2. Таким образом, множество решений уравнения $(x^2-x)(x^2-3x+2)=0$ есть $M=\{0;\ 1;\ 2\}$.

Ту же пару простейших уравнений нам пришлось бы рассматривать при решении уравнения $(x^2-x)^2+(x^2-3x+2)^2=0$. Однако здесь задача стоит иначе: требуется найти значения переменной x, удовлетворяющие одновременно двум требованиям: $x^2-x=0$ И $x^2-3x+2=0$. Связку И принято символизировать знаком фигурной скобки, объединяя эти уравнения в систему. Получим:

$$\begin{cases} x^2-x=0, \\ x^2-3x+2=0. \end{cases}$$

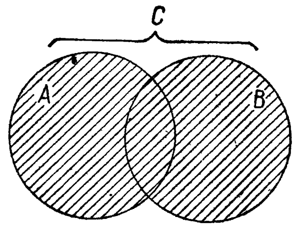
Множество решений уравнения $x^2-x=0$ есть $M_1=\{0;\ 1\}$, множество решений уравнения $x^2-3x+2=0$ есть $M_2=\{1;\ 2\}$. Множество решений системы и, следовательно, исходного уравнения состоит из чисел, входящих в оба множества M_1 И M_2 одновременно. Таким образом, множество решений уравнения $(x^2-x)^2+(x^2-3x+2)^2=0$ есть $M=\{1\}$.

Рассмотренные примеры вплотную подводят нас к формальному определению операций над множествами, с помощью которых по двум или нескольким данным множествам образуется некоторое новое множество.

Объединением (суммой) C двух множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих множеству A ИЛИ множеству B (ИЛИ здесь неразделительное, т. е. не исключается возможность одновременной принадлежности некоторых элементов и множеству A, и множеству B). Обозначают это так: $C=A\cup B$. На чертеже 13 левый круг обозначает множество A, а правый круг — множество B. Заштрихованная область изображает объединение множеств A и B.

Объединение трех и более множеств определяется аналогично.

Примеры. Объединение множества $\{1; 2; 3\}$ и множества $\{2, 5\}$ есть множество $\{1; 2; 3; 5\}$. Объединение множества чисел вида $4k+2$ (k — целое) с множеством чисел вида $4k$ есть множество всех четных чисел вида $2k$ (докажите!). Объединение множества целых чисел и множества четных чисел есть множество целых чисел. Ситуация, аналогичная последнему примеру, возникает всегда, когда одно из двух объединяемых множеств есть подмножество второго множества, т. е. при $A \subseteq B$ всегда $A \cup B = B$. Объединение двух совпадающих множеств есть то же самое множество: $A \cup A = A$.



Черт. 13

Решая уравнение $F(x)=0$ методом разложения левой части на множители $F(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$, мы получали множество решений исходного уравнения, объединяя множества решений уравнений $f_1(x)=0$ и $f_2(x)=0$.

Правда, здесь необходимо тщательно следить за изменением областей допустимых значений для рассматриваемых функций.

Решим, например, уравнение $\sqrt{x-3}\cdot(x+3)=0$.

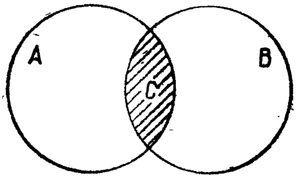
Приравнивая к нулю множители, стоящие в левой части уравнения, получим: $\sqrt{x-3}=0$ или $x+3=0$. Отсюда получаем две возможности: 1) $x=3$ или 2) $x=-3$.

Однако множество решений исходного уравнения состоит из единственного элемента $x=3$, так как при $x=-3$ множитель $\sqrt{x-3}$ теряет смысл.

С аналогичным положением мы встречаемся, решая уравнение $(x^2-5x+6)\cdot\frac{x+1}{x^2-9}=0$. Множество решений уравнения $x^2-5x+6=0$ есть $M_1=\{2; 3\}$; множество решений уравнения $\frac{x+1}{x^2-9}=0$ есть $M_2=\{-1\}$.

Однако, как и в предыдущем примере, нельзя получить множество решений исходного уравнения, образуя объединение двух полученных множеств M_1 и M_2 в соответствии с данным выше общим определением. Действительно, $x=3$ не входит в область допустимых значений дроби $\frac{x+1}{x^2-9}$. Следовательно, множество решений исходного уравнения есть $M=\{-1;\ 2\}$. Общий вид множества решений уравнения $f_1(x)\cdot f_2(x)=0$ будет получен в конце § 10.

Пересечением C двух множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих множеству A И множеству B одновременно. Иными словами, пересечение образовано всеми общими элементами данных множеств. Обозначают это так: $C=A\cap B$ (черт. 14). Аналогично определяется пересечение трех и более множеств. Термин «пересечение» по существу геометрического происхождения. В планиметрии точками пересечения двух кривых, рассматриваемых как множества точек на плоскости, назывались как раз их общие точки. Пересечением прямой и плоскости, рассматриваемых как множество точек пространства, является в общем случае их единственная общая точка. Однако если прямая и плоскость параллельны, то пересечение этих множеств пусто. Если же прямая лежит на плоскости, то пересечение этих множеств совпадает с множеством точек этой прямой.



Черт. 14

Примеры. Пересечение множеств $\{1;\ 2;\ 3\}$ и $\{2;\ 5\}$ есть множество $\{2\}$, состоящее из одного элемента 2. Пересечением множества четных чисел вида $2k$ (k — целое) и множества чисел вида $3k$ является множество чисел вида $6k$ (докажите!). Пересечение множества четных чисел и множества нечетных чисел пусто. Пересечение множества целых чисел и множества четных чисел есть множество четных чисел.

Ситуация, аналогичная последнему примеру, возникает всегда, когда одно из двух множеств есть подмножество второго, т. е. при $A\subseteq B$ всегда $A\cap B=A$. Пересечение двух совпадающих множеств есть то же множество: $A\cap A=A$.

Решая систему неравенств с одним неизвестным, т. е. находя множество значений переменной x, удовлетворяющих одновременно всем неравенствам системы, мы по существу находили пересечение множеств решений неравенств, входящих в эту систему. Рассмотрим для примера систему двух линейных неравенств, решение которой сводится к разбору простейших систем вида:

1) $\begin{cases} x < a, \\ x < b; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x > a, \\ x > b; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x > a, \\ x < b; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x < a, \\ x > b. \end{cases}$

Без ограничения общности рассуждений мы в каждом из четырех случаев будем считать, что $a < b$. (Случай $a = b$ не представляет интереса.)

Как было показано выше, линейным неравенством $x < a$ или $x > a$ задается открытый луч, таким образом, при решении каждой из четырех систем требуется найти пересечение двух открытых лучей.

В системе $\begin{cases} x < a, \\ x < b \end{cases}$ множество $(-\infty; a)$ есть подмножество множества $(-\infty; b)$, поэтому их пересечением, т. е. решением нашей системы, будет множество $(-\infty; a)$.

Аналогично в системе $\begin{cases} x > a, \\ x > b \end{cases}$ множество $(b; +\infty)$ есть подмножество множества $(a; +\infty)$, поэтому решением нашей системы будет множество $(b; +\infty)$.

В третьем случае пересечением двух открытых лучей $(a; +\infty)$ и $(-\infty; b)$ является интервал $(a; b)$. (Напомним, что мы предполагали всюду $a < b$!)

В четвертом случае пересечение множеств $(-\infty; a)$ и $(b; +\infty)$ пусто, решением системы является пустое множество.

В заключение этого раздела рассмотрим еще один пример. Пусть нужно решить неравенство $\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x-3} < 0$.

Решение этого неравенства сводится к решению двух систем:

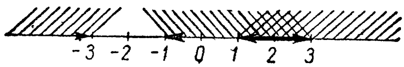
1) $\begin{cases} x^2+2x-3 > 0, \\ x^2-2x-3 < 0 \end{cases}$ ИЛИ 2) $\begin{cases} x^2+2x-3 < 0, \\ x^2-2x-3 > 0. \end{cases}$

Множество решений исходного неравенства получается объединением множеств решений этих двух систем.

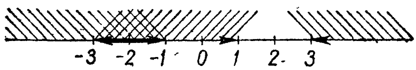
Решая первую систему, получаем:

$$\begin{cases} x < -3 \text{ ИЛИ } x > 1, \\ -1 < x < 3. \end{cases}$$

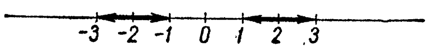
Множество решений неравенства $x^2+2x-3>0$ является объединением двух открытых лучей $(-\infty;\ -3)$ и $(1;\ +\infty)$. Множество решений неравенства $x^2-2x-3<0$ есть интервал $(-1; 3)$. Решением системы является пересечение множеств решений первого и второго неравенства. Получим интервал $(1;\ 3)$ (черт. 15). Аналогично во втором случае приводим систему к виду $\begin{cases} -3<x<1, \\ x<-1 \text{ ИЛИ } x>3 \end{cases}$ и получаем интервал $(-3;\ -1)$ (черт. 16). Итак, мно-



Черт. 15



Черт. 16



Черт. 17

жество решений исходного неравенства получается объединением двух интервалов $(-3;\ -1)$ и $(1;\ 3)$ (черт. 17). Мы предпочли приведенное решение так называемому «методу интервалов», так как оно позволило вскрыть теоретико-множественную сущность постановки задачи и процесса ее решения.

Упражнения

4. Выполнить операции объединения и пересечения над множествами A и B:

а) $A=[-1;\ 0]$; $B=[0;\ 1]$;

б) $A=[-1;\ 0)$; $B=[0;\ 1]$;

в) $A=[-1;\ 0)$; $B=(0;\ 1]$.

5. Найти объединение и пересечение множества рациональных чисел R и множества иррациональных чисел I.

6. Найти объединение и пересечение множества всех рациональных чисел и множества всех конечных десятичных дробей.

7. Найти объединение и пересечение множества всех целых чисел и множества всех положительных чисел.

8. Найти объединение и пересечение множества чисел вида $4k$ и множества чисел вида $6k$.

9. Найти объединение и пересечение множества целых чисел, не делящихся на 26, с множеством целых чисел, делящихся на 13.

10. Найти объединение и пересечение множества целых чисел, не делящихся на 13, с множеством целых чисел, делящихся на 26.

11. Проанализировать теоретико-множественную структуру решения неравенства:

а) $|x+4|>2$; б) $\sqrt{(x-2)(x+5)}>8+x$.

§ 4. Множество точек плоскости, задаваемое уравнением с одним или двумя переменными и системой уравнений

Основные понятия теории множеств и операций над множествами мы до сих пор иллюстрировали, используя множество действительных чисел или множество точек числовой оси. Теперь перейдем к рассмотрению множеств точек плоскости.

Положение точки на координатной плоскости вполне определено, если известны обе ее координаты. Но что можно сказать о точке, если известна только одна из ее координат? Например, где на координатной плоскости расположены все точки, у которых абсцисса равна 1, т. е. какое множество точек на плоскости задается уравнением $x=1$? Очевидно, сюда входят все те и только те точки, у которых первая координата — единица, а вторая — любое число. Геометрически это точки прямой, параллельной оси ординат.

Аналогично уравнением $y=-3$ задается множество всех точек прямой, параллельной оси абсцисс (здесь x — любое, а $y=-3$).

Легко сообразить, что уравнениями $x=\text{const}$ и $y=\text{const}$ мы задаем прямые, параллельные осям координат. В частности, $x=0$ — уравнение оси Oy и $y=0$ — уравнение оси Ox.

Теперь рассмотрим примеры некоторых соотношений между координатами, заданных в виде одного уравнения с двумя переменными x и y. Решением такого уравнения называется пара чисел (x_0, y_0), при подстановке которой в уравнение получается тождество. Геометрически каждому решению (x_0, y_0) уравнения с двумя переменными соответствует точка координатной плоскости $M(x_0, y_0)$. Будем рассматривать множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют некоторому уравнению.

Пусть, например, дано уравнение $y=x$. Им задается множество точек, имеющих две равные координаты. Все они и только они лежат на биссектрисе I и III координатных углов.

Уравнением $x+y=0$ задается множество точек биссектрисы II и IV координатных углов.

Вообще говоря, уравнение вида $ax+by=c$ не обязательно задает прямую линию. В качестве упражнения полезно рассмотреть различные комбинации особых значений коэффициентов a и b (дайте геометрическую иллюстрацию для каждого случая):

I. 1) $a\neq 0$; $b\neq 0$; c — любое;
2) $a=0$; $b\neq 0$; c — любое;
3) $a\neq 0$; $b=0$; c — любое.

II. $a=0$; $b=0$; $c\neq 0$.

III. $a=b=c=0$.

Приведем примеры еще некоторых множеств точек плоскости, задаваемых уравнением с двумя переменными:

$y=x^2$ — парабола;

$xy=-1$ — гипербола;

$x^2+y^2=1$ — окружность с центром в начале координат и радиусом 1;

$x^2+y^2=0$ — это уравнение задает единственную точку — начало координат;

$x^2+(y^2-1)^2=0$ — множество из двух точек (0, 1) и (0, —1);

$(x^2-1)^2+(y^2-1)^2=0$ — множество из четырех точек (1, 1); (1, —1); (—1, 1) и (—1, —1).

Пусть теперь координаты рассматриваемого множества точек удовлетворяют некоторой системе соотношений. Какое множество точек плоскости задается системой

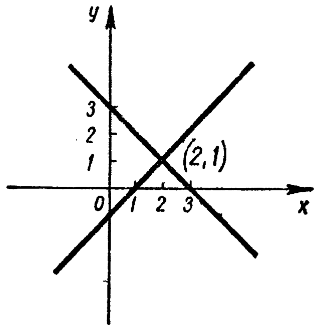
$$\begin{cases} x+y-3=0, \\ x-y-1=0? \end{cases}$$

С точки зрения теории множеств ищется пересечение множеств точек, задаваемых соответственно первым и вторым уравнениями системы. Пересечение множеств в этом случае представляет собой множество, содержащее единственную точку, а именно точку пересечения двух прямых. Координаты ее $x=2$, $y=1$.

Интересно сравнить разобранный пример с другим. Нужно построить множество точек, аналитическим заданием которого является уравнение

$$(x+y-3)\cdot(x-y-1)=0.$$

Для того чтобы произведение равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из множителей был равен нулю: $x+y-3=0$ ИЛИ $x-y-1=0$.



Черт. 18

Поэтому искомое множество представляет собой объединение двух множеств точек, задаваемых уравнениями $x+y-3=0$ и $x-y-1=0$ (черт. 18).

Упражнение

12. Построить множества точек плоскости, задаваемые следующими соотношениями:

а) $\begin{cases} x=0, \\ y=0; \end{cases}$ б) $xy=0$; в) $x^2-5x+6=0$.

(В последнем случае уравнением $x^2-5x+6=0$ задается пара параллельных прямых.)

Рассмотрим два алгебраических уравнения: $x^2+y^2-1=0$ и $xy=0$. Уравнением $x^2+y^2-1=0$ задается на плоскости множество A точек единичной окружности с центром в начале координат, а уравнением $xy=0$ — множество B точек пары координатных осей. Ниже мы разберем несколько алгебраических уравнений, решение которых в различных смыслах этого слова сводится к решению этих двух простейших уравнений. И в каждом случае множество C решений рассматриваемых уравнений получается из множеств решений A и B простейших уравнений $x^2+y^2-1=0$ (1) и $xy=0$ (2) с помощью тех или иных операций.

Например, каково множество решений уравнения

$$(x^2+y^2-1)\cdot xy=0?$$

Легко сообразить, что этому уравнению удовлетворяют как любое решение уравнения (1), так и любое решение уравнения (2), причем этими двумя возможностями все множество исчерпывается. Новое множество C получается в этом случае объединением двух исходных множеств A и B, т. е. состоит из точек, принадлежащих первому ИЛИ второму множеству (ИЛИ неразделительное). Итак, $C=A\cup B$.

Рассмотрим теперь множество C решений уравнения $(x^2+y^2-1)^2+(xy)^2=0$. Это уравнение равносильно требованию одновременного обращения в нуль выражений, стоящих в обеих круглых скобках, т. е. системе:

$$\begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ xy=0. \end{cases}$$

(Здесь фигурная скобка соответствует логической связке И между двумя условиями.)

Множество C решений данного уравнения состоит из точек пересечения единичной окружности с осями координат, т. е. является пересечением множеств A и B $(C=A\cap B)$.

Именно по такой схеме проводится графическое решение системы двух уравнений с двумя неизвестными, а также графическое решение уравнения $f(x)=0$, которое сводится к решению системы

$$\begin{cases} y=f(x), \\ y=0. \end{cases}$$

Первое из этих двух уравнений задает график функции, второе задает ось абсцисс, их пересечение есть множество корней уравнения $f(x)=0$ на оси абсцисс.

Аналогичный подход применим к уравнению:

$$\frac{(x^2+y^2-1)\,xy}{(x^2+y^2-1)^2+(xy)^2}=0.$$

Это уравнение равносильно системе

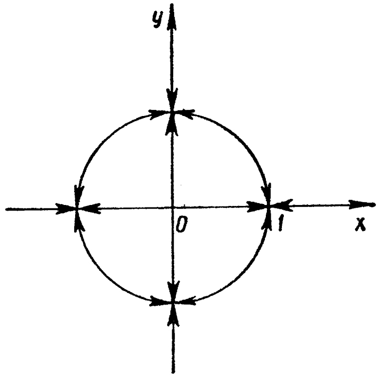
$$\begin{cases} (x^2+y^2-1)\,xy=0, \\ (x^2+y^2-1)^2+(xy)^2\neq 0, \end{cases}$$

которая распадается на две системы:

1) $\begin{cases} x^2+y^2-1=0, \\ (x^2+y^2-1)^2+(xy)^2\neq 0 \end{cases}$ ИЛИ 2) $\begin{cases} xy=0, \\ (x^2+y^2-1)^2+(xy)^2\neq 0. \end{cases}$

Эти две системы и связку ИЛИ здесь следует понимать так: каждое решение исходной системы должно быть решением хотя бы одной из двух последних систем, и обратно.

Множество решений системы 1) есть единичная окружность без точек, принадлежащих одновременно и окружности, и хотя бы одной из осей. Множество решений системы 2) есть пара координатных осей без точек, принадлежащих одновременно окружности и хотя бы одной из осей. Нас устраивают обе возможности, поэтому окончательно получаем множество решений исходной системы в виде объединения множества точек окружности с множеством точек координатных осей за вычетом точек пересечения каждой из осей с окружностью (черт. 19).



Черт. 19

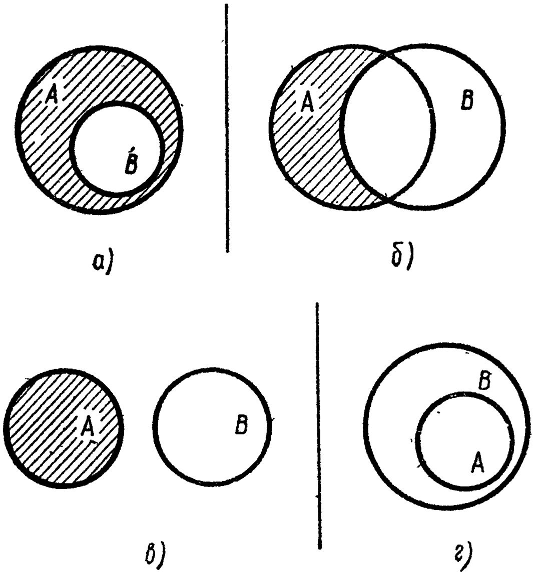
Можно было вести рассуждение и несколько иначе. Числитель дроби, стоящей в левой части, обращается в нуль для любой точки, лежащей на единичной окружности или на одной из осей. Знаменатель дроби обращается в нуль лишь в точках пересечения окружности с парой координатных осей. Именно эти точки и следует исключить из объединения первых двух множеств.

Множество решений нашего уравнения есть множество точек, принадлежащих ИЛИ только единичной окружности, ИЛИ только паре координатных осей (разделительное ИЛИ).

В последнем примере мы столкнулись с новыми операциями над множествами, которым мы и дадим теперь строгое формальное определение.

§ 5. Разность двух множеств. Универсальное множество. Дополнение множества

В теории множеств рассматривается также и разность двух множеств A и B. *Разностью* двух множеств A и B называется множество D ($D = A - B$), состоящее из всех элементов A, не входящих в B. Таким образом, из множества A достаточно удалить общие элементы множеств A и B, т. е. все элементы множества $A \cap B$. Проиллюстрируем данное определение на кругах Эйлера для различных случаев взаимного расположения множеств A и B (черт. 20).



Черт. 20

В простейшем случае а) $B \subseteq A$, т. е. множество B состоит только из элементов, входящих в множество A, и является их пересечением: $A \cap B = B$. Именно эти элементы удаляются из множества A при нахождении разности. Так разностью множества целых чисел и множества четных чисел является множество нечетных чисел.

В случае б) пересечение множеств A и B есть собственное подмножество каждого из данных множеств; в случае в) это пересечение пусто и из множества A нечего удалять; в случае г) пересечение A и B совпадает с множеством A, все элементы множества A подлежат удалению и искомая разность представляет собой пустое множество.

Проиллюстрируем примерами случаи б), в) и г).

Разностью множества четных чисел вида $2k$ и множества чисел вида $3k$ является множество четных чисел, не делящихся на 3, т. е. чисел вида $6k \pm 2$. Действительно, множество всех четных чисел есть объединение трех множеств: множества чисел вида $6k$, $6k+2$ и $6k-2$. Удалить из нашего множества придется только элементы вида $6k$, так как числа вида $6k \pm 2$ не делятся на 3.

Разностью множества четных чисел и множества нечетных чисел является множество четных чисел.

Разностью множества четных чисел и множества целых чисел является пустое множество.

Обратим внимание на то, что данное определение теоретико-множественной разности не соответствует общему алгебраическому определению разности двух чисел: равенство $x = a - b$ обозначало тот факт, что $a = b + x$. В нашем же случае объединение разности $A - B$ и множества B, вообще говоря, не совпадает с множеством A.

С понятием разности двух множеств мы уже фактически неоднократно сталкивались при решении алгебраических уравнений и систем. Так, например, решая уравнение

$$\frac{(x^2+y^2-1)\cdot xy}{(x^2+y^2-1)^2+(xy)^2} = 0,$$ мы свели его к двум

системам:

$$1) \begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ (x^2+y^2-1)^2+(xy)^2 \neq 0 \end{cases} \text{ ИЛИ } 2) \begin{cases} xy=0, \\ (x^2+y^2-1)^2+(xy)^2 \neq 0. \end{cases}$$

Они равносильны двум следующим системам:

$$1)' \begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ xy \neq 0 \end{cases} \text{ ИЛИ } 2)' \begin{cases} xy=0, \\ x^2+y^2-1 \neq 0. \end{cases}$$

Множество решений системы 1)′ можно получить, образуя разность между множеством A точек единичной окружности и множеством B точек координатных осей, таким образом, $C_1 = A - B$.

Аналогично множество решений системы 2)′ есть $C_2 = B - A$.

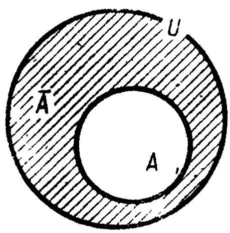
Тогда множество решений исходного уравнения есть $C = C_1 \cup C_2 = (A-B) \cup (B-A)$ (черт. 19).

Выражение $(A-B) \cup (B-A)$ называют *симметрической разностью* множеств A и B.

Часто рассматриваются множества, элементами которых являются только некоторые действительные числа, т. е. по существу подмножества множества всех действительных чисел. Тогда имеет смысл ввести новое понятие — *дополнение* $\overline{A}$ к данному множеству A. Элементами его являются все действительные числа, не принадлежащие множеству A. Так, например, дополнением к множеству положительных чисел является множество всех неположительных чисел, состоящее из нуля и всех отрицательных чисел. Дополнением к сегменту $[0; 1]$ служит объединение двух открытых полупрямых $(-\infty; 0)$ и $(1; +\infty)$. Каждое из них не содержит граничной точки (0 и 1 соответственно), так как точки 0 и 1 содержатся по определению сегмента в данном множестве $[0; 1]$.

Если рассматриваются лишь множества, элементами которых являются точки трехмерного пространства, т. е. подмножества множества всех точек трехмерного пространства, то дополнением к множеству A назовем множество, элементами которого являются все точки пространства, не входящие в A.

Таким образом, определение дополнения существенно зависит от того, до чего мы данное множество дополняем. Это множество всех элементов, рассматриваемых в данном вопросе, называют *универсальным*, мы обозначим его буквой U. Именно относительно него и берутся дополнения, без его указания понятие дополнения остается неопределенным.



Черт. 21

Из приведенных определений вытекает, что объединение множества и его дополнения есть универсальное множество ($A \cup \overline{A} = U$), а пересечение множества и его дополнения пусто ($A \cap \overline{A} = \varnothing$). На чертеже 21 U — универсальное множество, A — его подмножество. Дополнение $\overline{A}$ к множеству A заштриховано. Совершенно очевидно, что дополнение некоторого множества A до универсального множества U есть разность между универсальным множеством и множеством A ($\overline{A} = U - A$).

В заключение этого раздела еще раз вернемся к нахождению множества решений уравнения

$\frac{(x^2+y^2-1)\cdot xy}{(x^2+y^2-1)^2+(xy)^2}=0$, которое сводилось к двум системам:

$$1)' \begin{cases} x^2+y^2-1=0, \\ xy \neq 0 \end{cases} \text{ ИЛИ } 2)' \begin{cases} xy=0, \\ x^2+y^2-1 \neq 0. \end{cases}$$

После введения понятия дополнения, рассматривая в качестве универсального множество всех точек плоскости, мы можем найти множество решений системы 1)′ как пересечение множества точек единичной окружности A и дополнения $\overline{B}$ к множеству B точек координатных осей, таким образом, $C_1=A\cap\overline{B}$.

Аналогично $C_2=B\cap\overline{A}$

Отсюда получаем решение исходного уравнения:

$$C=C_1\cup C_2=(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A}).$$

Заметим, что из всего вышесказанного вытекает, что $A-B=A\cap\overline{B}$.

Упражнение

13. Решить уравнения

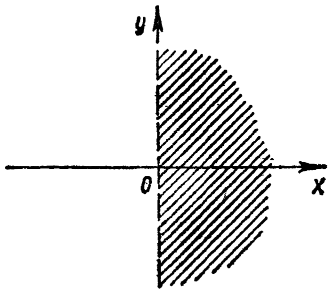
$$\text{а) } \frac{x^2+y^2-1}{xy}=0 \quad \text{и} \quad \text{б) } \frac{xy}{x^2+y^2-1}=0,$$

дать графическую иллюстрацию и провести теоретико-множественный анализ соотношений между множествами, фигурирующими в решении.

§ 6. Множество точек плоскости, задаваемое неравенством с одним или двумя переменными

Теперь займемся такими соотношениями между координатами, которые являются аналитическим заданием некоторой области плоскости.

Начнем с задания полуплоскости. Мы знаем, что уравнение $x=0$ определяет множество точек оси ординат. Если же рассмотреть множество точек, относительно которых известно, что абсцисса их положительна, а ордината — любое число (т. е. это множество определяется неравенством $x>0$), то получим правую полуплоскость (черт. 22). Неравенством $x < 0$ определяется левая полуплоскость. В обоих случаях точки граничной прямой не включаются в рассматриваемое множество, такая полуплоскость называется *открытой*. Верхняя и нижняя открытые полуплоскости задаются соответственно неравенствами $y > 0$ и $y < 0$. Если бы мы хотели задать *замкнутую* правую полуплоскость так, чтобы в рассматриваемое множество входили и точки оси Oy, нужно было бы рассмотреть неравенство $x \geqslant 0$. В этом случае на чертеже мы будем изображать ось ординат сплошной линией. В предыдущем примере ($x > 0$) ось ординат изображена штриховой линией.



Черт. 22

Упражнение

14. Построить множества точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенствам:

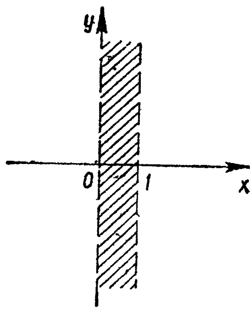
а) $x < 3$;
б) $y \geqslant -4$;
в) $x < -5$;
г) $0 < x < 1$;
д) $-2 < y < 3$.

Заметим, что двойное неравенство $0 < x < 1$ представляет собой по существу систему неравенств $\begin{cases} x > 0, \\ x < 1, \end{cases}$ что в соответствии с изложенной выше теорией приводит к нахождению пересечения двух полуплоскостей. В этом случае множество решений системы есть открытая полоса.

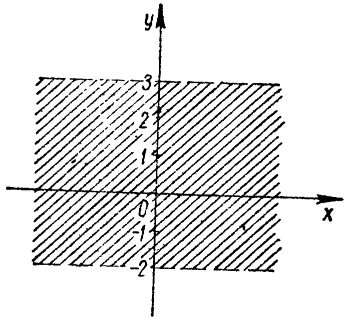
Геометрическая иллюстрация к случаям г) и д) показана соответственно на чертежах 23 и 24.

Вернемся еще раз к уравнению $y = x$. Точка M (2, 2) принадлежит множеству точек, задаваемому этим уравнением. Точки, абсцисса которых равна двум, а ордината больше двух, будут лежать на прямой $x = 2$ выше точки M. Вообще, для каждого произвольно взятого x_0

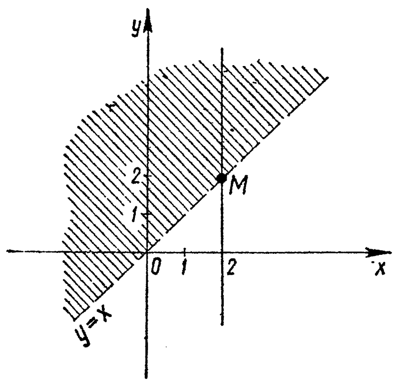
мы будем теперь выбирать те точки плоскости, у которых вторая координата больше x_0, т. е. те, которые лежат на прямой $x = x_0$ выше точки ее пересечения с прямой $y = x$.



Черт. 23



Черт. 24



Черт. 25.

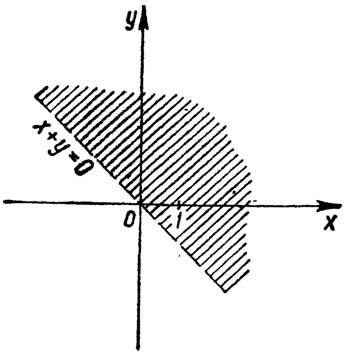
Таким образом, мы получим множество точек, расположенных выше прямой $y = x$. Эта открытая полуплоскость задается неравенством $y > x$ (черт. 25).

Совершенно аналогично соотношение $y < x$ задает множество точек плоскости, лежащих ниже прямой $y = x$.

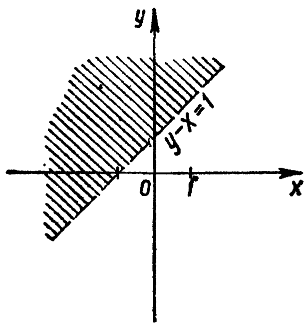
Упражнение

15. Построить множества точек плоскости, координаты которых удовлетворяют следующим соотношениям:

а) $x+y>0$ (черт. 26);
б) $y-x>1$ (черт. 27);

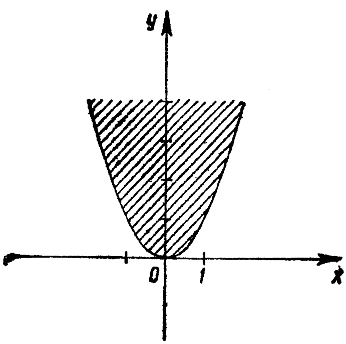


Черт. 26

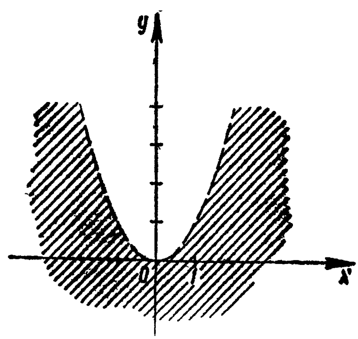


Черт. 27

в) $y \geqslant x^2$ (черт. 28);
г) $y < x^2$ (черт. 29);

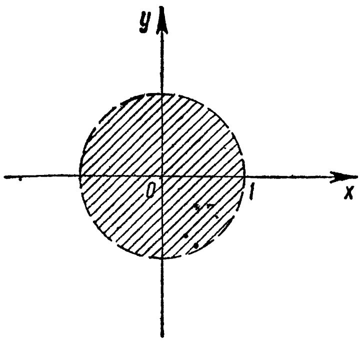


Черт. 28

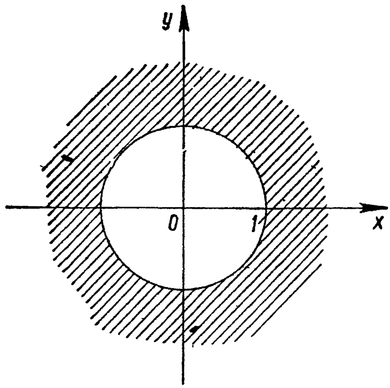


Черт. 29

д) $x^2+y^2<1$ (черт. 30);
е) $x^2+y^2 \geqslant 1$ (черт. 31).



Черт. 30



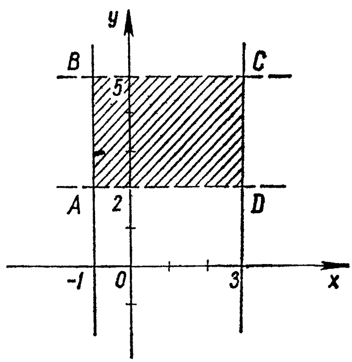
Черт. 31

§ 7. Геометрический смысл системы алгебраических неравенств

Требуется построить множество точек плоскости, аналитическим заданием которого является система

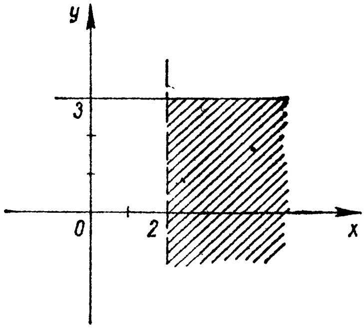
$$\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 3, \\ 2 < y < 5. \end{cases}$$

Неравенство $-1 \leqslant x \leqslant 3$ определяет множество точек вертикальной полосы, включая точки прямых $x = -1$ и $x = 3$ (черт. 32). Неравенство $2 < y < 5$ определяет внутренние точки горизонтальной полосы. Решением исходной системы является пересечение этих двух множеств, которое состоит из точек прямоугольника $ABCD$, причем точки отрезков AB и CD входят в рассматриваемое множество, а точки отрезков BC и AD нет. Ясно, что сами точки A, B, C и D не принадлежат нашему множеству. Действительно, точка A, например, имеет координаты $x = -1$, $y = 2$. Но число $y = 2$ не удовлетворяет второму соотношению системы $(2 < y < 5)$.

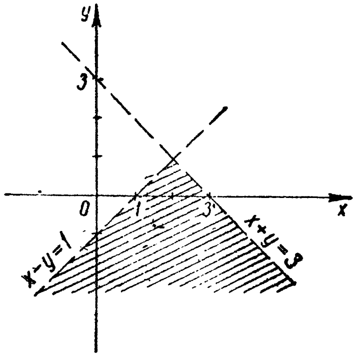


Черт. 32

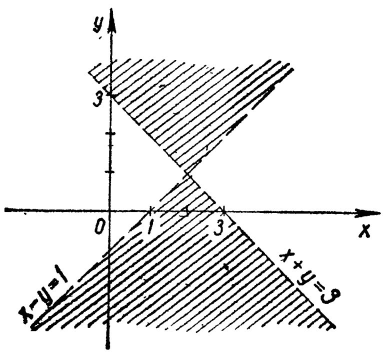
Упражнения



Черт. 33



Черт. 34



Черт. 35

16. Постройте множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют следующим соотношениям:

а) $\begin{cases} x > 2, \\ y \leqslant 3 \end{cases}$ (черт. 33).

Ответ.

Все точки, лежащие одновременно правее прямой $x = 2$ и на прямой $y = 3$ или ниже ее. Точка с координатами $x = 2, y = 3$ не входит в рассматриваемое множество.

б) $\begin{cases} x + y < 3, \\ x - y > 1 \end{cases}$ (черт. 34).

Ответ.

Точки, расположенные одновременно ниже прямой $x + y = 3$ и ниже прямой $x - y = 1$.

Интересно сравнить разобранный пример с неравенством (черт. 35):

$$(x + y - 3)(x - y - 1) < 0.$$

Для выполнения этого неравенства необходимо и достаточно выполнение одной из следующих систем:

$$\begin{cases} x + y - 3 < 0, \\ x - y - 1 > 0 \end{cases}$$

или

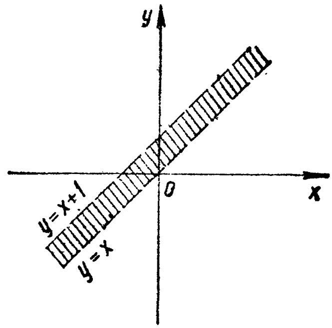
$$\begin{cases} x + y - 3 > 0, \\ x - y - 1 < 0. \end{cases}$$

Отсюда ясно, что множество решений последнего неравенства есть объединение множеств решений двух указанных систем, в результате чего получаем множество внутренних точек двух вертикальных углов,

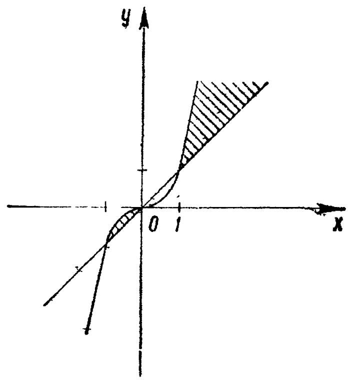
в) $x < y < x + 1$ (черт. 36);

г) $\begin{cases} y \geqslant x \\ y \leqslant x^3 \end{cases}$ (черт. 37);

д) $\frac{x}{y} > 1$ (черт. 38).



Черт. 36



Черт. 37

Данное неравенство распадается на две системы:

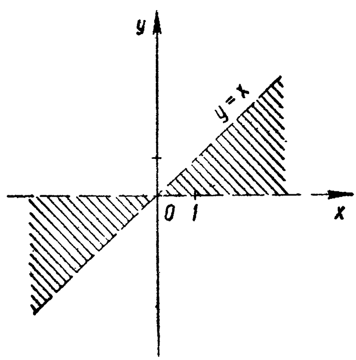
$$1) \begin{cases} y > 0, \\ x > y \end{cases} \text{ ИЛИ}$$

$$2) \begin{cases} y < 0, \\ x < y. \end{cases}$$

Множество решений первой системы получается как пересечение множества точек верхней координатной полуплоскости и множества точек, лежащих ниже прямой $y = x$.

Множество решений второй системы есть пересечение множества точек нижней координатной полуплоскости и множества точек, лежащих выше прямой $y = x$.

Множество решений исходного неравенства получается как объединение двух построенных множеств.



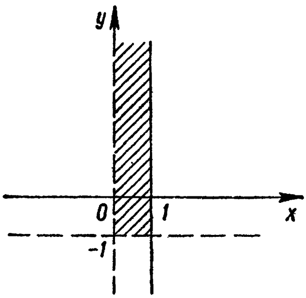
Черт. 38

В заключение этой серии упражнений рассмотрим построение множества точек плоскости, задаваемого тремя соотношениями.

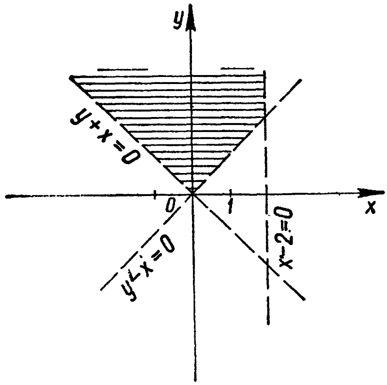
17.

а) $\begin{cases} 0 < x \leqslant 1, \\ y > -1 \end{cases}$ (черт. 39);

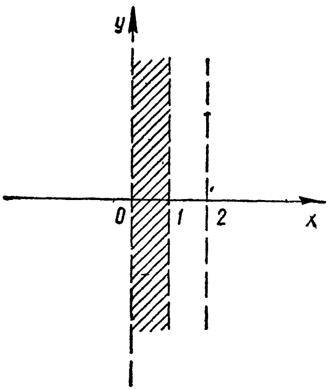
б) $\begin{cases} x + y > 0, \\ x - y < 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases}$ (черт. 40);



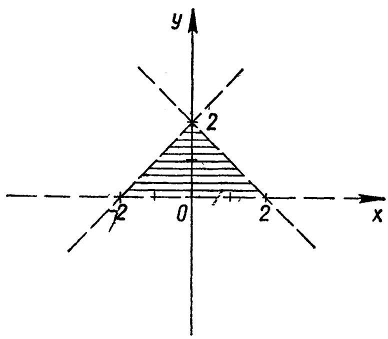
Черт 39



Черт 40



Черт. 41



Черт 42

в) $\begin{cases} x > 0, \\ x < 1 \\ x < 2 \end{cases}$ (черт. 41);

(В этом случае неравенство $x < 2$ практически не работает, так как из системы $\begin{cases} x<1, \\ x<2 \end{cases}$ вытекает $x<1$, и обратно.)

г) $\begin{cases} 0<y<x+2, \\ y<-x+2 \end{cases}$ (черт. 42)

(В этом случае множеством решений являются точки плоскости, принадлежащие пересечению трех полуплоскостей, определяемых соотношениями: $y>0$, $y<x+2$, $y<-x+2$. В результате получаются внутренние точки заштрихованного треугольника.

§ 8. Выпуклые множества точек на плоскости. Знакомство с линейным программированием

Знакомство с множеством решений системы линейных неравенств дает нам возможность продемонстрировать применение этой теории к решению практических задач оптимального использования наличных ресурсов (транспорта, сырья, рабочей силы и т. д.). Речь пойдет о так называемом методе линейного программирования, сущность которого мы кратко поясним на одном примере.

Некоторое производство выпускает продукцию двух видов: $П_1$ и $П_2$. Изготовляется она из четырех видов сырья: S_1, S_2, S_3 и S_4. Запас сырья и расход его на единицу каждого вида продукции задается таблицей:

Вид сырья	Запас сырья	Расход сырья на единицу продукции вида	
		$П_1$	$П_2$
S_1	19	2	3
S_2	13	2	1
S_3	15	0	3
S_4	18	3	0

Доход производства от единицы продукции вида $П_1$ равен 7 денежным единицам, а от единицы продукции вида $П_2$—5 денежным единицам.

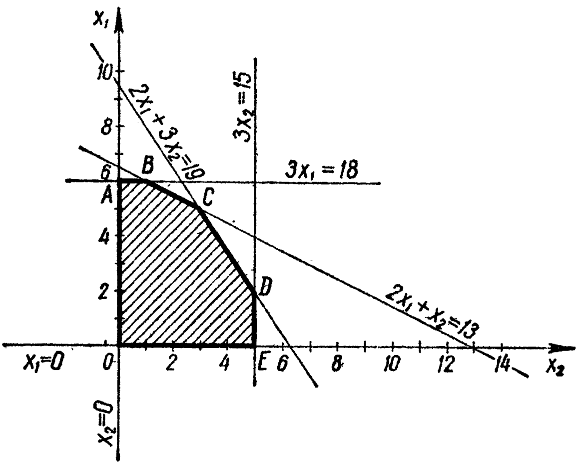
Как следует спланировать выпуск продукции, чтобы доход предприятия был наибольший?

Пусть x_1 — число единиц продукции вида $П_1$ и x_2 — число единиц продукции вида $П_2$.

Допустимыми с точки зрения ресурсов завода являются те значения x_1 и x_2, которые удовлетворяют следующей системе соотношений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 19, \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 13, \\ 3x_2 \leqslant 15, \\ 3x_1 \leqslant 18, \\ x_1 \geqslant 0, \\ x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Множество точек плоскости (x_1, x_2), координаты которых удовлетворяют заданной системе соотношений, показано на чертеже 43 штриховкой.



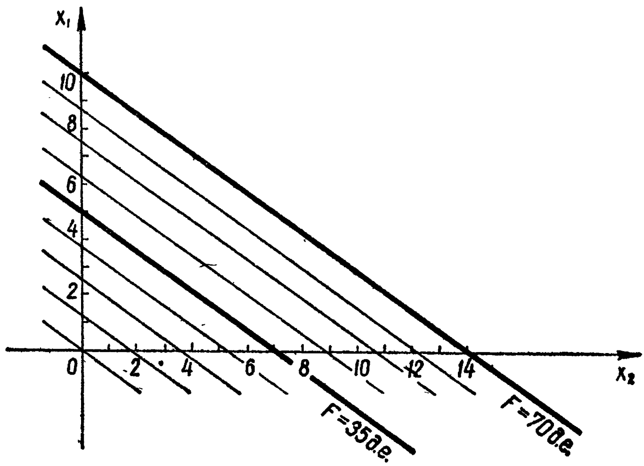
Черт. 43

Оно представляет собой выпуклый многоугольник.

Каждая точка этого множества (x_1, x_2) соответствует конкретному плану, возможному с точки зрения наличных ресурсов завода. Нас интересует та или те точки этого множества, которые соответствуют максимальному доходу предприятия. Доход предприятия подсчитывается по формуле $7x_1 + 5x_2$ и, таким образом, является линейной функцией двух переменных x_1 и x_2. Итак, требуется найти ту точку (или те точки) множества возможных планов, для которой достигает максимума функция $F(x_1, x_2) = 7x_1 + 5x_2$.

Каждому заданному постоянному значению F соответствует своя прямая плоскости. Например, уравнение $7x_1 + 5x_2 = 35$ изображается на графике прямой линией, отсекающей на оси Ox_1 отрезок длиной в 5 единиц, а на оси Ox_2 — длиной в 7 единиц. Аналогично уравнение $7x_1 + 5x_2 = 70$ изображается на графике прямой линией, отсекающей на оси Ox_1 отрезок длиной в 10 единиц, а на оси Ox_2 — длиной в 14 единиц.

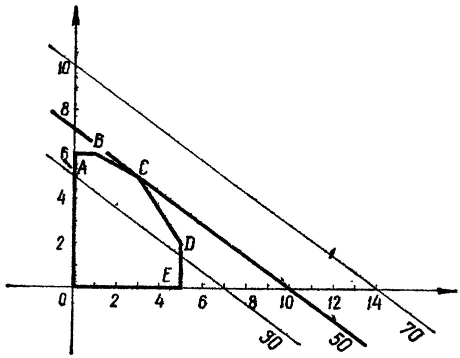
Ясно, что с увеличением F соответствующая линия одинакового дохода поступательно перемещается, удаляясь от начала координат (черт. 44).



Черт. 44

Наложив семейство параллельных линий одинакового дохода (черт. 44) на выпуклое множество возможных планов (черт. 43), легко заметить, что наибольшему возможному значению F соответствует прямая, проходящая через вершину C многоугольника $OABCDE$ (черт. 45).

В точке C с координатами $x_1 = 5$, $x_2 = 3$ линейная функция двух аргументов $F(x_1, x_2) = 7x_1 + 5x_2$ принимает значение $F(5; 3) = 7 \cdot 5 + 5 \cdot 3 = 50$. Это и есть максимальный доход, который может быть получен предприятием при данных условиях.



Черт. 45

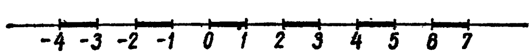
§ 9. Составление системы алгебраических неравенств и уравнений по заданному множеству решений (обратные задачи)

В обучении математике стало традиционным параллельное изучение прямых и обратных операций: сложения и вычитания, умножения и деления, нахождения дроби от числа и числа по его дроби, логарифмирования и потенцирования. Новые программы по математике предполагают вслед за дифференцированием изучение неопределенного интеграла.

Для закрепления и углубления изложенного материала мы предлагаем ниже несколько упражнений на решение так называемых обратных задач. Мы имеем в виду упражнения, в которых по даннному множеству точек прямой или плоскости требуется составить его аналитическое задание.

Упражнения

18. На прямой задано множество точек, состоящее из бесконечного множества отрезков единичной длины (черт. 46). Аналитическим заданием такого множества



Черт. 46

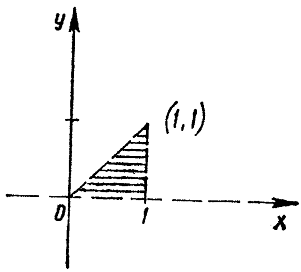
можно считать двойное неравенство $2n \leqslant x \leqslant 2n+1$, где n — любое целое число.

То же множество с помощью тригонометрии можно было бы задать неравенством $\sin \pi x \geqslant 0$. Рекомендуем разобрать эту возможность учащимся, знакомым с тригонометрическими функциями числового аргумента.

19. Зададим аналитически множество внутренних точек треугольника, вершины которого находятся в точках (0, 0), (1, 0), (1, 1) (черт. 47).

Стороны треугольника находятся на прямых $y=x$, $x=1$, $y=0$. Внутренние точки треугольника лежат ниже прямой $y=x$, левее прямой $x=1$ и выше прямой $y=0$, т. е. должны выполняться одновременно следующие три неравенства:

$$\begin{cases} y<x, \\ x<1, \\ y>0. \end{cases}$$



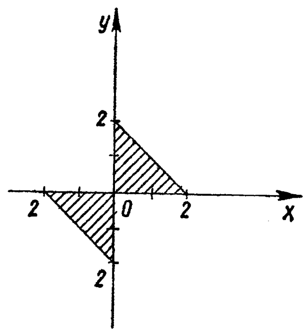
Черт. 47

Множество внутренних точек треугольника является пересечением трех открытых полуплоскостей.

20. Зададим аналитически несколько более сложное множество точек плоскости, изображенное на чертеже 48. Множество точек первой координатной четверти задается условием

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \end{cases}$$

множество точек третьей координатной четверти задается условием $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \leqslant 0. \end{cases}$

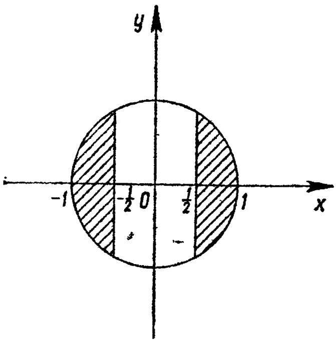


Черт. 48

Легко понять, что неравенство $xy \geqslant 0$ выполняется для точек первой или третьей четверти и притом только для них.

Из точек первой и третьей координатных четвертей нашему множеству принадлежат те и только те, которые лежат между прямыми $y=-x-2$ и $y=-x+2$, что выражается следующим двойным неравенством: $-x-2\leqslant y\leqslant -x+2$.

Таким образом, наше множество определяется следующей системой неравенств:



Черт. 49

$$\begin{cases} xy\geqslant 0, \\ -x-2\leqslant y\leqslant -x+2, \end{cases}$$

иначе

$$\begin{cases} xy\geqslant 0, \\ |x+y|\leqslant 2. \end{cases}$$

21. Изображенное на чертеже 49 множество состоит из точек плоскости, лежащих внутри единичного круга с центром в начале координат и удаленных от оси ординат на расстояние, не меньшее $\frac{1}{2}$. Это множество точек задается следующей системой соотношений: $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 1, \\ |x|\geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$

§ 10. Основные законы операций над множествами

Введенные операции над множествами обладают свойствами, очень похожими на свойства хорошо известных алгебраических операций: сложения, умножения и др. Так, например, операции объединения и пересечения удовлетворяют переместительному и сочетательному законам: $A\cup B=B\cup A$; $A\cap B=B\cap A$; $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ и $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

Смысл выписанных законов совершенно очевиден. Так, например, сочетательный закон для объединения справедлив потому, что как $(A\cup B)\cup C$, так и $A\cup(B\cup C)$ обозначают множество элементов, принадлежащих хотя бы одному из трех множеств.

Справедливость сочетательного закона для пересечения легко получим, заметив, что как $(A\cap B)\cap C$, так и $A\cap(B\cap C)$ обозначают множество элементов, принадлежащих каждому из трех множеств одновременно.

Можно доказать два распределительных закона для операции объединения и пересечения множеств:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ — распределительный закон пересечения относительно объединения;

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ — распределительный закон объединения относительно пересечения.

Доказательство первого из них проведем методом перебора всех возможностей.

Напомним, что равенство или совпадение двух множеств имеет место тогда и только тогда, когда каждый элемент первого множества принадлежит второму, а каждый элемент второго принадлежит первому.

Пусть $x \in A \cap (B \cup C)$, что равносильно системе $\begin{cases} x \in A, \\ x \in B \cup C, \end{cases}$ которая распадается на две следующие системы:

$$1) \begin{cases} x \in A, \\ x \in B \end{cases} \quad \text{или} \quad 2) \begin{cases} x \in A, \\ x \in C. \end{cases}$$

Выполнение системы 1) или 2) приводит по определению пересечения множеств к выполнению хотя бы одного из условий

$$1а)\ x \in A \cap B \ \text{ИЛИ}\ 2а)\ x \in A \cap C.$$

А это по определению объединения множеств дает

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Докажем обратное утверждение.

Пусть $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, т. е:

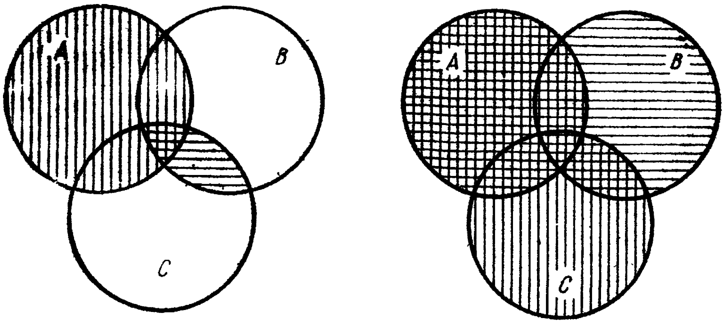
$$1)\ x \in A \cap B \ \text{ИЛИ}\ 2)\ x \in A \cap C, \text{ откуда}$$

$$1а) \begin{cases} x \in A, \\ x \in B \end{cases} \text{ИЛИ}\ 2а) \begin{cases} x \in A \\ x \in C. \end{cases}$$

Таким образом, с необходимостью вытекает, что $x \in A$ и, кроме того, имеет место хотя бы одно из включений $x \in B$ ИЛИ $x \in C$. Это можно записать в виде системы: $\begin{cases} x \in A, \\ x \in B \cup C. \end{cases}$ Отсюда по определению операции пересечения $x \in A \cap (B \cup C)$.

Итак, множества $A \cap (B \cup C)$ и $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ состоят из одних и тех же элементов и, следовательно, совпадают.

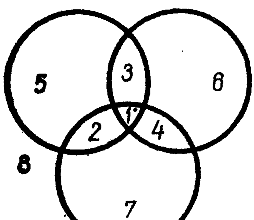
Вместо повторения формального логического доказательства распределительного закона $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap \cap (A \cup C)$ обратимся к иллюстрации его на кругах Эйлера (черт. 50). На левом чертеже вертикальной штриховкой отмечено множество A, горизонтальной штриховкой — $B \cap C$, объединение этих двух множеств $A \cup (B \cap C)$ изображается всей заштрихованной областью.



Черт. 50.

На правом чертеже горизонтальной штриховкой обозначено объединение множеств $A \cup B$, вертикальной штриховкой — объединение множеств $A \cup C$. Квадратной штриховкой отмечена их общая часть, т. е. множество $(A \cup B) \cap$ $\cap (A \cup C)$. В результате на обоих чертежах получена одна и та же область.

Приведенное наглядное рассуждение является доказательством распределительного закона операции объединения относительно операции пересечения. Общность его для случая трех множеств обусловливается тем, что на чертеже 50 представлены все восемь возможностей принадлежности некоторого элемента трем данным множествам. Поясним это подробнее с помощью чертежа 51. Область, отмеченная цифрой 1, изображает множество элементов, принадлежащих всем трем множествам. Элементы, принадлежащие только двум из трех данных множеств, попадают в области 2, 3 и 4, а элементы, принадлежащие только одному из трех данных множеств, попадают в области 5, 6 и 7.



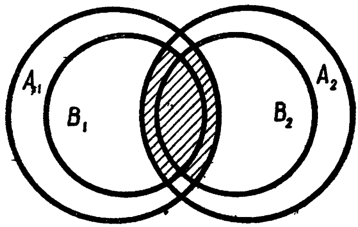
Черт. 51

Множество элементов, не принадлежащих ни одному из трех данных множеств, соответствует внешней области, отмеченной цифрой 8. С точки зрения принадлежности элемента трем данным множествам все возможности исчерпаны.

Так как четыре окружности делят плоскость не более чем на 14 частей, а с точки зрения принадлежности элемента четырем данным множествам существуют шестнадцать возможностей, то аналогичное доказательство на кругах Эйлера для четырех множеств провести не удалось бы.

В заключение этого раздела рассмотрим более подробно проблему решения уравнения $F(x)=0$ способом разложения левой части на множители $F(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$.

Пусть множество допустимых значений аргумента уравнения $f_1(x)=0$ есть A_1, а множество решений этого уравнения есть B_1. Аналогично для второго уравнения $f_2(x)=0$ A_2 — множество допустимых значений аргумента, B_2 — множество решений (черт. 52).



Черт. 52

Каждое решение уравнения $f_1(x)\cdot f_2(x)=0$ принадлежит одновременно каждой из областей определения A_1 и A_2, т. е. $A_1 \cap A_2$. В то же время каждое решение уравнения $f_1(x)\cdot f_2(x)=0$ принадлежит одному из множеств B_1 или B_2, т. е. $B_1 \cup B_2$. Таким образом, множество решений уравнения $f_1(x)\cdot f_2(x)=0$ есть $(A_1 \cap A_2) \cap$ $\cap (B_1 \cup B_2)$.

К нахождению множества решений уравнения $f_1(x)\times$ $\times f_2(x)=0$ можно подойти несколько иначе.

Для того чтобы произведение двух функций в точке x обратилось в нуль, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке один из множителей обращался в нуль, а второй имел смысл, т. е. точка x должна принадлежать одному из следующих множеств: $(B_1 \cap A_2)$ или $(B_2 \cap A_1)$, а следовательно, и их объединению $(B_1 \cap A_2) \cup (B_2 \cap A_1)$.

Докажем тождественность двух полученных ответов, используя основные законы операций над множествами, а также включения $B_1 \subseteq A_1$ и $B_2 \subseteq A_2$.

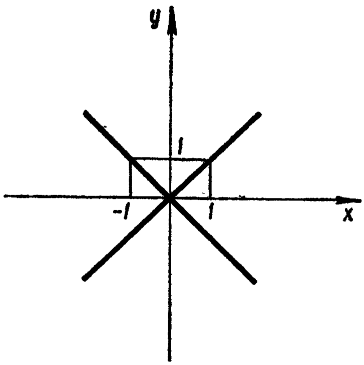
$$(A_1 \cap A_2) \cap (B_1 \cup B_2) = [(A_1 \cap A_2) \cap B_1] \cup [(A_1 \cap A_2) \cap B_2] =$$
$$= [(A_1 \cap B_1) \cap A_2] \cup [A_1 \cap (A_2 \cap B_2)] = (B_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap B_2).$$

Рекомендуем учащимся самостоятельно мотивировать каждый переход в вышеприведенной цепочке равенств.

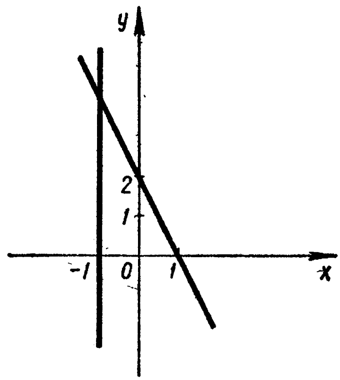
На чертеже 52 заштриховано множество решений уравнения $f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$.

§ II. Задачи и упражнения по всей теме

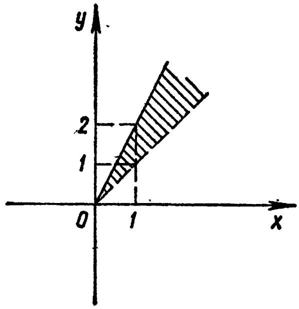
22. Задать аналитически следующие множества точек плоскости, ограниченные прямыми, окружностями, дугами окружностей, параболами, гиперболой (черт. 53—61).



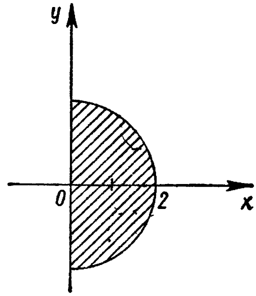
Черт. 53



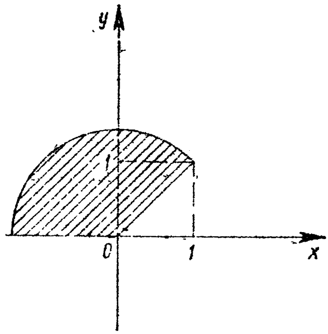
Черт. 54



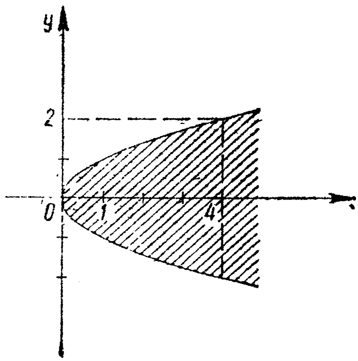
Черт. 55



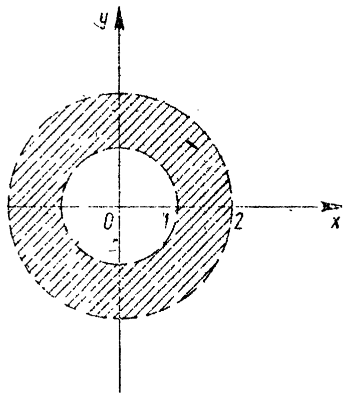
Черт. 56



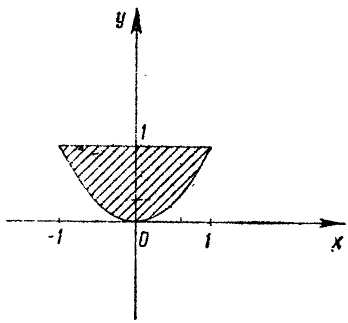
Черт. 57



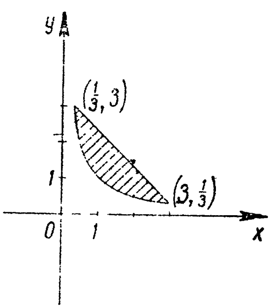
Черт. 58



Черт. 59



Черт. 60



Черт. 61

Ответы.

Черт. 53. $x^2-y^2=0$.

Черт. 54. $(y+2x-2)(x+1)=0$.

Черт. 55. $x<y\leqslant 2x$.

Черт. 56. $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 4, \\ x\geqslant 0. \end{cases}$

Черт. 57. $\begin{cases} y\geqslant x, \\ x^2+y^2\leqslant 2, \\ y\geqslant 0. \end{cases}$

Черт. 58. $x\geqslant y^2$ (иная форма ответа: $-\sqrt{x}\leqslant y\leqslant\sqrt{x}$).

Черт. 59. $1<x^2+y^2<4$.

Черт. 60. $x^2\leqslant y\leqslant 1$.

Черт. 61. $\begin{cases} x>0, \\ \frac{1}{x}\leqslant y\leqslant -x+\frac{10}{3}. \end{cases}$

23. Решить уравнения и изобразить графически полученные множества:

а) $(y-x)(xy-1)=0$;

б) $(y-x)^2+(xy-1)^2=0$;

в) $\frac{x-y}{xy-1}=0$;

г) $\frac{xy-1}{y-x}=0$;

д) $\frac{(y-x)(xy-1)}{(y-x)^2+(xy-1)^2}=0$.

Ответы.

а) $(a,\ a)$, где a — любое действительное число, или $\left(b,\ \frac{1}{b}\right)$, где b — любое действительное число, отличное от нуля;

б) $(1,\ 1)$; $(-1,\ -1)$;

в) $(a,\ a)$, где a — любое действительное число, отличное от ± 1;

г) $\left(a,\ \frac{1}{a}\right)$, где a — любое действительное число, отличное от 0 и от ± 1;

д) $(a,\ a)$, где a — любое действительное число, отличное от ± 1, или $\left(b,\ \frac{1}{b}\right)$, где b — любое действительное число, отличное от 0 и от ± 1.

24. Построить множество точек плоскости, задаваемых следующими системами неравенств:

а) $x^2-1 \leqslant y \leqslant 1-x^2$;

б) $\begin{cases} y^2 \leqslant x^4, \\ x^2 \leqslant 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{x}{y} \leqslant 0, \\ |y-x| \leqslant 2. \end{cases}$

25. Дать теоретико-множественный анализ решения уравнения $-x^2+x+4=|1-x|$.

26. Построить круги Эйлера для множеств рациональных чисел, целых, положительных и четных.

27. Построить круги Эйлера для множеств выпуклых четырехугольников, трапеций, параллелограммов, прямоугольников, ромбов, квадратов.

28. Упростить $A \cap (A \cup B)$.

Ответ. A.

29. Какое из двух множеств является подмножеством другого:

а) P, $P \cap Q$;

б) P, $P \cup Q$?

Ответы.

а) $P \cap Q \subseteq P$;

б) $P \subseteq P \cup Q$.

30. Возможно ли равенство

$$A \cap B = A \cup B?$$

Ответ.

Возможно, при $A=B$.

31. Даны множества A и B.

С помощью кругов Эйлера изобразить множества $A \cap \overline{B}$ и $B \cup \overline{A}$.

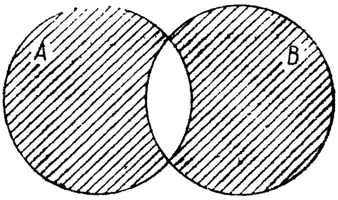
Разобрать всевозможные случаи.

32. Упростить $(P \cap Q) \cap (\overline{Q} \cap P)$.

Ответ.

Пустое множество.

33. Задать множество, показанное штриховкой на чертеже 62, с помощью операций объединения множеств, пересечения, нахождения разности.



Черт. 62

Ответ.

$(A-B)\cup(B-A)$ или в другой форме $(A\cup B)-(A\cap B)$.

34. Достаточно ли условия $A-B=C$ для выполнения соотношения $A=B\cup C$?

Ответ.

Нет, к данному условию необходимо присоединить $B\subseteq A$. Без этого можно лишь утверждать, что $A\subseteq B\cup C$.

35. Достаточно ли условия $A=B\cup C$ для выполнения соотношения $A-B=C$?

Ответ.

Нет, к данному условию необходимо присоединить, что $B\cap C=\varnothing$. В общем случае можно лишь утверждать, что $A-B\subseteq C$.

36. Верны ли равенства:

а) $A-(B\cup C)=(A-B)-C$;

б) $A\cup(B-C)=(A\cup B)-C$;

в) $(A-B)\cup C=(A\cup C)-B$? Если не верны, то в какую сторону имеет место включение?

Ответы.

а) верно; б) нет, $A\cup(B-C)\supseteq(A\cup B)-C$; в) нет, $(A-B)\cup C\supseteq(A\cup C)-B$.

37. Упростить $\overline{\overline{A}}$.

Ответ. A.

38. Доказать законы для дополнений с помощью кругов Эйлера:

а) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$;

б) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

Примечание. Эти законы называются законами двойственности.

39*. Используя законы двойственности, упростить выражение

$$\overline{(\overline{A \cup B}) \cap (\overline{\overline{A} \cup \overline{B}})}.$$

Ответ.

$A \cup B$.

40. Существует ли множество X, удовлетворяющее при любом A равенству $A \cup X = A$?

Ответ.

Пустое множество.

41. Существует ли множество X, удовлетворяющее при любом A равенству $A \cap X = A$?

Ответ.

Универсальное множество U.

42. С помощью кругов Эйлера решить следующую задачу: Из 100 студентов английский язык изучают 28, немецкий — 30, французский — 42, английский и немецкий — 8, английский и французский — 10, немецкий и французский — 5, немецкий, английский и французский — 3. Сколько студентов не изучают ни одного языка? Сколько студентов изучают один французский язык, один английский, один немецкий?

Ответ.

Ни одного языка не изучают 20 человек; один французский изучают 30 человек, один английский — 13, один немецкий — 20.

Примечание. На схеме (черт. 51) обозначены 8 областей. Не случайно для нахождения количества элементов каждой из этих областей задается восемь условий.

43. В отчете об обследовании 100 студентов сообщалось, что количество студентов, изучающих различные языки, таково: все три языка — 5, немецкий и английский — 10, французский и английский — 8, немецкий и французский — 20, английский — 30, немецкий — 23, французский — 50. Отчет не был принят. Почему?

ЛИТЕРАТУРА

1) П. С. Александров. Понятие множества. Детская энциклопедия, т. III (изд. 1), т. II (изд. 2).
2) И. В. Проскуряков. Множества. Энциклопедия элементарной математики, т. I, гл. I. М., Гостехиздат, 1951.
3) В. Серпинский. О теории множеств. М., «Просвещение», 1966.
4) Дж. Кемени, Дж. Снелл, Дж. Томпсон. Введение в конечную математику. М., Изд-во иностр. лит., 1963.

МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Н. Я. Виленкин,
С. И. Шварцбурд,
А. Г. Мордкович

Условно материал статьи разбит на 12 пунктов, включая итоговую письменную контрольную работу. Это соответствует числу учебных часов, отводимых на тему. Естественно, что не со всякими группами учащихся в каждое занятие удастся пройти весь материал, собранный в одном пункте. Авторы главным образом заботились о том, чтобы материала было достаточно для занятий с любыми учащимися, в том числе и с более сильными[1].

В статье, кроме теоретического материала, приводятся задачи. Из них 22, которые, по мнению авторов, целесообразно рассмотреть на занятиях в классе, даны в тексте, в основном с решениями. В конце каждого пункта даны упражнения, близкие по тематике к рассматриваемым в данном пункте, а потому могут использоваться учителем для домашних заданий.

Кроме теоретических вопросов, относящихся к методу математической индукции, в статье, естественно, достаточное место уделено вопросам «полной» и «неполной». индукции. Сопоставление математической индукции с обычной «полной» и «неполной» индукцией поможет учащимся понять существо дела. От такта учителя и подготовлен-

[1] Основой для написания настоящей статьи является соответствующий параграф подготавливаемого к печати издательством «Просвещение» пособия «Математический анализ» для учащихся IX и X классов математических школ (авторы — Н. Я. Виленкин, С. И. Шварцбурд).

ности учащихся зависит степень внимания к вопросам соотношения между индукцией и дедукцией. Представляется, во всяком случае, что по этому последнему вопросу учащиеся не должны ничего «учить» в обязательном порядке.

§ 1. Полная и неполная индукция

В основе всякого математического исследования лежат дедуктивный и индуктивный методы. Дедуктивный метод рассуждений — это рассуждение от общего к частному, т. е. рассуждение, исходным моментом которого является общий результат, а заключительным моментом — частный результат.

В математике мы применяем дедуктивный метод, проводя рассуждения такого типа: данная фигура — прямоугольник; у каждого прямоугольника диагонали равны, следовательно, и у данного прямоугольника диагонали равны.

По своему первоначальному смыслу слово *индукция* применяется к рассуждениям, при помощи которых получают общие выводы, опираясь на ряд частных утверждений. Простейшим методом рассуждений такого рода является *полная* индукция. Вот пример подобного рассуждения.

Требуется установить, что каждое четное натуральное число n в пределах $4 \leqslant n \leqslant 100$ представимо в виде суммы двух простых чисел. Для этого перебираются все такие числа и выписываются соответствующие разложения:

$$\begin{aligned}
4 &= 2 + 2;\\
6 &= 3 + 3;\\
8 &= 5 + 3;\\
10 &= 7 + 3;\\
12 &= 7 + 5;\\
&\ldots\ldots\\
98 &= 93 + 5;\\
100 &= 97 + 3.
\end{aligned}$$

Эти 49 равенств показывают, что каждое из интересующих нас чисел действительно представляется в виде суммы двух простых. Общее утверждение доказывается здесь разбором всех возможных частных случаев.

Приведем еще один пример (его можно рассмотреть с учащимися X класса после того, как будет изучена соответствующая тема геометрии). Обозначим через $Г$, $В$, $Р$ соответственно число граней, вершин и ребер правильного многогранника. Докажем, что

$$Г + В = Р + 2.$$

Как известно, имеются лишь 5 типов правильных многогранников. Рассмотрев каждый из 5 случаев в отдельности, путем непосредственного подсчета убедимся в справедливости интересующего нас соотношения. Естественно, что после этого мы вправе считать сформулированное утверждение верным для любого правильного многогранника.

Таким образом, полная индукция заключается в том, что общее утверждение доказывается по отдельности в каждом из конечного числа могущих представиться случаев.

Иногда общий результат удается предугадать после рассмотрения не всех, а достаточно большого числа частных случаев (так называемая *неполная* индукция). Разультат, полученный неполной индукцией, остается, однако, лишь гипотезой, пока он не доказан точным математическим рассуждением, охватывающим все частные случаи. Иными словами, неполная индукция в математике не считается законным методом строгого доказательства, но является мощным эвристическим методом открытия новых истин.

Пусть, например, требуется найти сумму первых n последовательных нечетных чисел. Рассмотрим частные случаи:

$1 = 1$, но $1 = 1^2$;
$1 + 3 = 4$, но $4 = 2^2$;
$1 + 3 + 5 = 9$, но $9 = 3^2$;
$1 + 3 + 5 + 7 = 16$, но $16 = 4^2$;
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$, но $25 = 5^2$.

После рассмотрения этих немногих частных случаев напрашивается следующий общий вывод:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2,$$

т. е. сумма первых n последовательных нечетных чисел равна n^2. В дальнейшем будет доказано, что это утверждение справедливо.

Рассмотрим сумму кубов последовательных натуральных чисел:

$$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3;$$

$$S_1 = 1^3 = 1;$$
$$S_2 = 1^3 + 2^3 = 9.$$
$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36;$$
$$S_4 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100.$$

Мы замечаем, что числа 1, 9, 36, 100 являются квадратами чисел 1, 3, 6, 10. Но

$$3 = 1 + 2;$$
$$6 = 1 + 2 + 3;$$
$$10 = 1 + 2 + 3 + 4;$$

значит, можно предположить, что

$$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2. \quad (1)$$

Разумеется, сделанное наблюдение еще не может служить доказательством справедливости формулы (1). В следующем пункте мы познакомимся с методом, пользуясь которым можно доказать, что формула (1) верна.

Следует отметить, что индуктивные рассуждения иногда приводят к ошибочным выводам. Приведем примеры.

Разность двузначного числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 9. Разность трехзначного числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 99. Возникает предположение о том, что разность четырехзначного числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, будет делиться на 999. Это, однако, неверно, ибо, например, $2231 - 1322 = 909$, но 909 не делится на 999.

Рассматривая числа вида $2^{2^n} + 1$, французский математик П. Ферма заметил, что при $n = 1, 2, 3, 4$ получаются простые числа. Он предположил, что все числа такого вида простые. Однако Л. Эйлер нашел, что уже при $n = 5$ число $2^{32} + 1$ не является простым: оно делится на 641.

Приведем еще один пример ошибочного вывода, сделанного индуктивным путем. Требуется выяснить, существует ли такое натуральное число n, что число вида $991n^2+1$ будет точным квадратом. Рассматривая частные случаи при $n=1, 2, 3, 4, \ldots$, мы будем получать числа, не являющиеся точными квадратами. Если бы мы в течение многих лет только тем и занимались, что производили вычисления для последовательных натуральных чисел, то каждый раз получали бы числа, не являющиеся точными квадратами. Вполне естественно предположить, что при всех натуральных значениях n числа вида $991n^2+1$ не будут точными квадратами. Однако это неверно: с помощью вычислительной машины было найдено 29-значное число m такое, что число $991n^2+1$ оказалось точным квадратом.

Итак, неполная индукция может привести к ошибке. Однако замечательно, что она иногда приводит к истине, хотя, по-видимому, возможность появления ошибки очень велика.

Упражнения[1]

1. $S_n=-1+2-3+4-5+6-7+\ldots+(-1)^n\cdot n.$

Вычислив S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, угадайте, чему будет равна: а) S_{316}; б) S_{527}.

Обобщая частные результаты, угадайте формулы для следующих сумм и произведений.

2. $S_n=-1+3-5+7-9+\ldots+(-1)^n(2n-1).$
3. $P_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n+1}\right).$
4. $S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}.$
5. $S_n=1+2+3+\ldots+n.$
6. $S_n=1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+\ldots+n(3n+1).$
7. $P_n=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right].$

8. Справедливо ли утверждение: n^2+n+17 — простое число при любом натуральном n? Проверьте его справедливость, положив $n=1, 2, 3, 4, \ldots, 15, 16.$

[1] Здесь и во всех последующих упражнениях и примерах n — натуральное число.

§ 2. Метод математической индукции

Метод полной индукции имеет в математике лишь ограниченное применение. Многие интересные математические утверждения охватывают бесконечное число частных случаев, а провести проверку для бесконечного числа случаев человек не может (примером такого утверждения может служить любое утверждение, относящееся ко всем натуральным числам). Неполная же индукция, как мы видели, часто приводит к ошибочным результатам.

Во многих случаях выход из такого рода затруднений заключается в обращении к особому методу рассуждений, называемому методом математической индукции. Название «индукция» здесь по существу условно (см. ниже «Общие замечания»). Оно привилось лишь потому, что этот метод позволяет заменить строгим доказательством эвристические соображения по методу неполной индукции. Метод математической индукции заключается в следующем.

Пусть нужно доказать справедливость некоторого утверждения для любого натурального числа n (например, нужно доказать, что сумма первых n нечетных чисел равна n^2). Непосредственная проверка этого утверждения для каждого значения n невозможна, поскольку множество натуральных чисел бесконечно. Чтобы доказать это утверждение, проверяют сначала его справедливость для $p=1$. Затем доказывают, что при любом натуральном значении k из справедливости рассматриваемого утверждения при $n=k$ вытекает его справедливость и при $n=k+1$. Тогда утверждение считается доказанным для всех n. В самом деле, утверждение справедливо при $n=1$. Но тогда оно справедливо и для следующего числа $n=1+1=2$. Из справедливости утверждения для $n=2$ вытекает его справедливость для $n=2+1=3$. Отсюда, в свою очередь, следует справедливость утверждения для $n=4$ и т. д. Ясно, что в конце концов мы дойдем до любого натурального числа n. Значит, утверждение верно для любого n.

Обобщая сказанное, сформулируем следующий общий принцип.

Чтобы доказать справедливость для любого натурального числа n некоторого общего утверждения, достаточно:

а) установить справедливость этого утверждения при $n=1$;

б) доказать, что из справедливости утверждения при n, равном некоторому k, вытекает его справедливость и при $n=k+1$ (каково бы ни было натуральное число k).

Законность такого способа доказательства представляется «очевидной» каждому, кто разобрал некоторое число частных случаев его употребления. Но такая «очевидность» не является формальным доказательством. Далее будет показано, что сформулированное выше общее предложение можно доказать, исходя из некоторых других столь же общих предложений, принятых в качестве аксиом. Однако эти аксиомы сами по себе не более очевидны, чем сформулированный нами сейчас принцип математической индукции. Поэтому столь же законно принять сам этот принцип в качестве аксиомы. Дадим несколько иную его словесную формулировку.

Принцип (аксиома) математической индукции

Утверждение, зависящее от натурального числа n, справедливо для любого n, если выполнены два условия:

а) утверждение справедливо при $n=1$;

б) при любом натуральном значении k из справедливости утверждения для $n=k$ вытекает его справедливость и для $n=k+1$.

Доказательство по методу математической индукции проводится следующим образом. Сначала доказываемое утверждение проверяется для $n=1$. Эту часть доказательства называют *базисом индукции*. Затем следует часть доказательства, называемая *индукционным шагом*. В этой части доказывают справедливость утверждения для $n=k+1$ в предположении справедливости утверждения для $n=k$ (предположение индукции). При проведении индукционного шага нужно внимательно следить за тем, чтобы рассуждение оставалось верным для любых значений k, т. е. чтобы никакие конкретные свойства числа k (скажем, четность, простота и т. д.) не использовались в процессе доказательства (см. формулировку пункта б) аксиомы математической индукции).

Приведем примеры доказательств методом математической индукции. Прежде всего докажем справедливость утверждения, угаданного в предыдущем пункте.

Пример 1. Доказать, что

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2.$$

Решение. а) $S_1=1=1^2$. Следовательно, утверждение верно при $n=1$.

б) Пусть k — любое натуральное число и пусть утверждение справедливо для $n=k$, т. е.

$$S_k=1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2.$$

Докажем, что тогда утверждение справедливо и для следующего натурального числа $n=k+1$, т. е. докажем, что

$$S_{k+1}=1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2.$$

В самом деле,

$$S_{k+1}=S_k+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2.$$

Тем самым по принципу математической индукции утверждение доказано для любого натурального значения n.

Пример 2. Доказать, что

$$-1+3-5+7-9+\ldots+(-1)^n(2n-1)=(-1)^n\cdot n$$

(см. упр. 2).

Решение. а) $S_1=-1=(-1)^1\cdot 1$. Следовательно, утверждение верно при $n=1$.

б) Пусть k — любое натуральное число и пусть утверждение справедливо для $n=k$, т. е.

$$S_k=-1+3-5+\ldots+(-1)^k(2k-1)=(-1)^k\cdot k.$$

Докажем, что тогда утверждение справедливо и для следующего натурального числа $n=k+1$, т. е. докажем, что

$$S_{k+1}=-1+3-5+\ldots+(-1)^k(2k-1)+(-1)^{k+1}(2k+1)=$$
$$=(-1)^{k+1}(k+1).$$

В самом деле,

$$S_{k+1}=S_k+(-1)^{k+1}(2k+1)=(-1)^k\cdot k+(-1)^{k+1}(2k+1)=$$
$$=(-1)^{k+1}(-k+2k+1)=(-1)^{k+1}\cdot(k+1).$$

Значит, утверждение верно для всех n.

Пример 3. Доказать, что

$$P_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1},$$

(см. упр. 3).

Приведем теперь примеры неправильного применения метода математической индукции. Докажем прежде всего следующую неверную теорему:

«Теорема». Никакое конечное множество чисел не содержит чисел, не равных друг другу.

«Доказательство». Проведем индукцию по числу элементов в множестве. При $n=1$ утверждение очевидно — в множестве, содержащем только одно число, нет не равных друг другу чисел. Пусть «теорема» справедлива для множеств из k элементов. Возьмем множество из $k+1$ элементов: $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$. По предположению индукции имеем: $a_1=a_2=\ldots=a_k$. Далее, по тому же предположению имеем: $a_2=a_3=\ldots=a_k=a_{k+1}$ и поэтому $a_1=a_2=a_3=\ldots=a_k=a_{k+1}$.

По принципу математической индукции заключаем, что «теорема» справедлива при всех значениях n.

Ошибочность проведенного рассуждения состоит в следующем: при проведении индукционного шага мы воспользовались тем, что k—элементное множество содержит не менее двух элементов, т. е. считали, что $k \geqslant 2$, хотя, как отмечалось выше, никакими конкретными свойствами числа k пользоваться нельзя.

Приведем еще один пример неправильного применения метода математической индукции. Докажем следующую неверную теорему.

«Теорема». Любое натуральное число равно следующему за ним натуральному числу.

«Доказательство». Предположим, что при любом k утверждение верно для $n=k$, т. е. что $k=k+1$. Докажем, что тогда утверждение справедливо и при $n=k+1$, т. е. что $k+1=k+2$. Но это очевидно, ибо если к обеим частям равенства $k=k+1$ прибавить по 1, то равенство не нарушится, и мы получим $k+1=k+2$. По методу математической индукции заключаем, что «теорема» справедлива при всех значениях n.

Ошибочность проведенного рассуждения состоит в том, что мы «забыли» проверить справедливость «теоремы» при $n=1$ (т. е. не была проведена та часть доказательства, которая выше названа базисом индукции). Поскольку при $n=1$ «теорема» неверна: $1 \neq 2$ — то метод математической индукции здесь неприменим.

Иногда вместо принципа математической индукции принимают в качестве аксиомы одно из следующих предложений:

А. *Если множество натуральных чисел содержит число* 1 *и вместе с числом k всегда содержит и число $k+1$, то это множество совпадает с множеством всех натуральных чисел* (аксиома Пеано).

Б. *В каждом непустом множестве натуральных чисел имеется первый элемент.*

Можно показать, что принцип математической индукции и каждое из предложений А и Б равносильны (любые два из этих предложений являются следствиями третьего). Чтобы быть совсем точным, следует оговориться, что при доказательстве их равносильности приходится опираться на некоторые другие более элементарные свойства натуральных чисел (которые в строгом изложении, например у Пеано, тоже формулируются в виде аксиом).

Для примера проведем доказательство принципа математической индукции на основе допущения Б.

Предположим, что, хотя условия а) и б) принципа математической индукции выполнены, утверждение верно не для всех натуральных чисел. Тогда в непустом множестве натуральных чисел, для которых утверждение неверно, есть первый элемент m, причем $m \neq 1$, что следует из условия а). Согласно одной из аксиом Пеано, у всякого натурального числа, за исключением 1, есть предшествующий элемент. Пусть k — натуральное число, предшествующее числу m. Для $n=k$ утверждение справедливо, но тогда из условия б) следует, что оно справедливо и для следующего числа $n=m$, что противоречит предположению.

В ряде случаев бывает нужно доказать справедливость некоторого утверждения не для всех натуральных чисел, а лишь для $n \geqslant p$, где p — фиксированное натуральное число. В этом случае принцип математической индукции формулируется следующим образом:

Если утверждение справедливо при $n=p$ и если для любого $k \geqslant p$ из справедливости утверждения для $n=k$ следует его справедливость для $n=k+1$, то утверждение верно для всех $n \geqslant p$.

Заметим, что и в данном случае при проведении индукционного шага нельзя использовать никакие конкретные свойства числа, кроме свойства $k \geqslant p$.

Исходя из допущения Б, сформулированный принцип можно доказать аналогично тому, как это было сделано выше. Исходя из того же допущения Б, нетрудно доказать и следующую теорему, обосновывающую другую форму принципа математической индукции.

Теорема. Если утверждение справедливо для $n=1$ и если для любого k из того, что оно верно для всех натуральных чисел, меньших $k+1$, следует его справедливость для $k+1$, то оно верно для всех натуральных чисел.

Общие замечания. В понимании логического строения различных наук большую роль играет различие «дедуктивных» и «индуктивных» методов исследования. Этот круг вопросов трудно здесь осветить полностью, но следующие замечания кажутся нам необходимыми.

1) Дедуктивные методы рассуждений всегда строятся так, что хотя бы одна из посылок обладает той же или большей общностью по сравнению с выводом. В собственном смысле слова «индуктивными» называются такие методы рассуждений, в которых общий вывод делается исключительно на основе частных посылок. Принцип полной индукции можно сформулировать в виде аксиомы логики. Если считать эту формулировку одной из посылок, то обнаруживается, что рассуждения по методу полной индукции опираются на посылку значительно более общую, чем вывод. То же самое относится, как мы видели, и к методу математической индукции: одной из посылок здесь является аксиома математической индукции или одна из заменяющих ее аксиом. Эти предложения относятся к утверждениям о свойствах каждого натурального числа или к подмножествам натурального ряда, их общность не меньше, чем общность получаемых по методу математической индукции выводов.

2) Собственно индуктивные выводы (выводы при помощи неполной индукции) необходимы в экспериментальных науках, а в математике играют лишь эвристическую роль. Все настоящие доказательства в математике дедуктивны и претендуют на полную достоверность выводов в отличие от выводов при помощи неполной индукции, где достоверность выводов зависит от достаточности числа и разнообразия частных наблюдений, лежащих в основе вывода.

Впрочем, в действительности эта противоположность между математикой и экспериментальными науками не столь безусловна и окончательна. Но здесь мы не можем входить в проблематику происхождения математических аксиом, их непротиворечивости и т. д.

Упражнения

Доказать следующие формулы:

9. $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ (см. упр. 5).

10. $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

11. $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2$ (см. § 1).

12. $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

13. $1\cdot4+2\cdot7+3\cdot10+\ldots+n(3n+1)=n(n+1)^2$ (см. упр. 6).

14. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ (см. упр. 4).

15. $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]=\frac{n+2}{2n+2}$ (см. упр. 7).

§ 3. Применение метода математической индукции в задачах на суммирование

Пример 4. Доказать, что

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}, \tag{2}$$

где $x\neq 1$.

Решение. $S_1=1+x=\frac{x^2-1}{x-1}$, следовательно, при $n=1$ формула верна.

Пусть k — любое натуральное число и пусть формула верна при $n=k$, т. е.

$$S_k=1+x+x^2+\ldots+x^k=\frac{x^{k+1}-1}{x-1}.$$

Докажем, что тогда

$$S_{k+1}=1+x+x^2+\ldots+x^k+x^{k+1}=\frac{x^{k+2}-1}{x-1}.$$

В самом деле,

$$S_{k+1}=S_k+x^{k+1}=\frac{x^{k+1}-1}{x-1}+x^{k+1}=\frac{x^{k+2}-1}{x-1}.$$

Значит, по принципу математической индукции формула верна для любого натурального n.

Пример 5. Доказать, что

$$3+33+333+\ldots+\underbrace{333\ldots3}_{n\text{ цифр}}=\frac{10^{n+1}-9n-10}{27}.$$

Решение. $S_1=3$. С другой стороны, при $n=1$ имеем: $\frac{10^{1+1}-9-10}{27}=3$. Значит, $S_1=\frac{10^{1+1}-9-10}{27}$, т. е. при $n=1$ формула верна.

Предположим, что

$$S_k=3+33+333+\ldots+\underbrace{333\ldots3}_{k\text{ цифр}}=\frac{10^{k+1}-9k-10}{27}.$$

Докажем, что тогда

$$S_{k+1}=3+33+333+\ldots+\underbrace{333\ldots3}_{k\text{ цифр}}+\underbrace{333\ldots33}_{(k+1)\text{ цифр}}=$$
$$=\frac{10^{k+2}-9(k+1)-10}{27}.$$

В самом деле,

$$S_{k+1}=S_k+\underbrace{333\ldots33}_{(k+1)\text{ цифр}}=$$
$$=S_k+3\cdot10^k+3\cdot10^{k-1}+\ldots+3\cdot10^2+3\cdot10+3=$$
$$=S_k+3(1+10+10^2+\ldots+10^k).$$

Но по предположению индукции $S_k=\frac{10^{k+1}-9k-10}{27}$, а по формуле (2) $1+10+10^2+\ldots+10^k=\frac{10^{k+1}-1}{10-1}$. Следовательно,

$$S_{k+1}=\frac{10^{k+1}-9k-10}{27}+3\cdot\frac{10^{k+1}-1}{9}=\frac{10^{k+2}-9(k+1)-10}{27}.$$

Итак, формула верна при любом натуральном n.

Прежде чем перейти к следующему примеру, условимся целую часть положительного числа x обозначать символом $[x]$. Так, $[3]=3$; $[5{,}7]=5$; $\left[\frac{1}{3}\right]=0$; $[\sqrt{5}]=2$. Отметим, что при любом натуральном значении n справедлива формула:

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]=n. \qquad (3)$$

В самом деле, если $n=2m$, то $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]=\left[\frac{2m}{2}\right]+$
$$+\left[\frac{2m+1}{2}\right]=[m]+\left[m+\frac{1}{2}\right]=2m=n.$$
Если $n=2m+1$, то
$$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]=\left[\frac{2m+1}{2}\right]+\left[\frac{2m+2}{2}\right]=m+m+1=2m+1=n.$$
Тем самым формула (3) доказана.

Пример 6. Вывести формулу для суммы:

$$S_n=-1+2-3+4-5+\ldots+(-1)^n\cdot n \quad (\text{см. упр. 1}).$$

Решение. Рассмотрим S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6. Имеем: $S_1=-1$, $S_2=1$, $S_3=-2$, $S_4=2$, $S_5=-3$, $S_6=3$. Получается последовательность $-1, +1, -2, +2, -3, +3, \ldots$ Но

$$1=\left[\frac{1+1}{2}\right]=\left[\frac{2+1}{2}\right];\ 2=\left[\frac{3+1}{2}\right]=\left[\frac{4+1}{2}\right];$$

$$3=\left[\frac{5+1}{2}\right]=\left[\frac{6+1}{2}\right].$$

Знаки членов полученной последовательности чередуются так же, как и в данной нам сумме. Следовательно, можно предположить, что

$$S_n=(-1)^n\left[\frac{n+1}{2}\right]. \qquad (4)$$

Разумеется, сделанное наблюдение еще не может служить доказательством справедливости формулы (4). Поэтому докажем эту формулу, пользуясь методом математической индукции.

Справедливость формулы (4) для $n=1$ (и даже для $n=2, 3, 4, 5, 6$) уже установлена. Предположим, что

$$S_k=(-1)^k\left[\frac{k+1}{2}\right].$$

Докажем, что тогда

$$S_{k+1}=-1+2-3+\ldots+(-1)^k\cdot k+(-1)^{k+1}\cdot(k+1)=$$
$$=(-1)^{k+1}\left[\frac{k+2}{2}\right].$$

Имеем:

$$S_{k+1}=S_k+(-1)^{k+1}\cdot(k+1)=$$
$$=(-1)^k\left[\frac{k+1}{2}\right]+(-1)^{k+1}(k+1)=$$
$$=(-1)^{k+1}\left(k+1-\left[\frac{k+1}{2}\right]\right).$$

Но из формулы (3) следует, что

$$\left[\frac{k+1}{2}\right]+\left[\frac{k+2}{2}\right]=k+1,$$

откуда

$$k+1-\left[\frac{k+1}{2}\right]=\left[\frac{k+2}{2}\right].$$

Значит,

$$S_{k+1}=(-1)^{k+1}\left[\frac{k+2}{2}\right],$$

чем справедливость перехода от k к $k+1$ доказана.

На основании принципа математической индукции заключаем, что формула (4) верна при всех n.

Упражнения

16. Произведение $1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n$ обозначается знаком $n!$ и читается так: «n—факториал». Доказать, что

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1.$$

17. Доказать, что

$$\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}=1-\frac{1}{n!}.$$

18. Знак $\sum\limits_{m=1}^{n} a_m$ обозначает сумму всех членов последовательности с общим членом a_m от $m=1$ до $m=n$. Доказать, что

$$\sum_{m=1}^{n} m(m+1)(m+2)\ldots(m+p)=$$
$$=\frac{1}{p+2}n(n+1)(n+2)\ldots(n+p+1).$$

19. Вывести формулу для суммы:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

20. Вывести формулу для суммы:

$$S_n=1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot n^2.$$

§ 4. Доказательство тождеств

Пример 7. Доказать, что при всех допустимых значениях x имеет место тождество:

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2+\ldots+\left(x^n-\frac{1}{x^n}\right)^2=$$
$$=\frac{1}{x^2-1}\left(x^{2n+2}-\frac{1}{x^{2n}}\right)-2n-1.$$

Решение. Надо доказать, что тождество справедливо при всех x, кроме $x=0,\ 1,\ -1$.

При $n=1$ имеем:

$$\frac{1}{x^2-1}\left(x^4-\frac{1}{x^2}\right)-3=\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2,$$

т. е. при $n=1$ тождество выполняется.

Предположим, что

$$S_k=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2+\ldots+\left(x^k-\frac{1}{x^k}\right)^2=$$
$$=\frac{1}{x^2-1}\left(x^{2k+2}-\frac{1}{x^{2k}}\right)-2k-1.$$

Докажем, что тогда

$$S_{k+1}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2+\ldots$$
$$\ldots+\left(x^k-\frac{1}{x^k}\right)^2+\left(x^{k+1}-\frac{1}{x^{k+1}}\right)^2=$$
$$=\frac{1}{x^2-1}\left(x^{2k+4}-\frac{1}{x^{2k+2}}\right)-2(k+1)-1.$$

Имеем:

$$S_{k+1}=\frac{1}{x^2-1}\left(x^{2k+2}-\frac{1}{x^{2k}}\right)-2k-1+\left(x^{k+1}-\frac{1}{x^{k+1}}\right)^2=$$
$$=\frac{x^{4k+4}-x^2+x^{4k+6}-x^{4k+4}+x^2-1}{(x^2-1)\,x^{2k+2}}-2(k+1)-1=$$
$$=\frac{1}{x^2-1}\left(x^{2k+4}-\frac{1}{x^{2k+2}}\right)-2(k+1)-1.$$

Итак, тождество верно для любого натурального числа n.

Самостоятельная работа № 1

Вариант I

1. Доказать, что

$$\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}.$$

2. Доказать, что

$$\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{1}{3\cdot5\cdot7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$$

Вариант II

1. Доказать, что

$$\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}.$$

2 Доказать, что

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

Упражнения

Доказать следующие тождества.

21. $x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n=\dfrac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$; $x\neq 1$.

22. $\dfrac{a+1}{2}+\dfrac{a+3}{4}+\dfrac{a+7}{8}+\ldots+\dfrac{a+2^n-1}{2^n}=\dfrac{(a-1)(2^n-1)}{2^n}+n.$

23. $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{4}{1+x^4}+\ldots+\dfrac{2^n}{1+x^{2^n}}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$; $|x|\neq 1$.

24. $\dfrac{x}{1-x^2}+\dfrac{x^2}{1-x^4}+\dfrac{x^4}{1-x^8}+\ldots+\dfrac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}=\dfrac{1}{1-x}\cdot\dfrac{x-x^{2^n}}{1-x^{2^n}}$; $|x|\neq 1$.

§ 5. Доказательство неравенств методом математической индукции

Пример 8. Доказать, что если $a>b$ и a, b — положительные числа, то $a^n>b^n$.

Решение. При $n=1$ утверждение очевидно: $a^1>b^1$. Предположим, что $a^k>b^k$, и докажем, что тогда $a^{k+1}>b^{k+1}$.

В самом деле, так как $a>0$, то из $a^k>b^k$ следует

$$a^{k+1}>ab^k. \tag{5}$$

Так как $b^k>0$, то из $a>b$ следует

$$ab^k>b\cdot b^k=b^{k+1}. \tag{6}$$

Сопоставляя неравенства (5) и (6), получаем по свойству транзитивности неравенств $a^{k+1}>b^{k+1}$.

Этим утверждение доказано для всех n.

Пример 9. Доказать, что $2^n>2n+1$ при любом натуральном $n\geqslant 3$.

Решение. При $n=3$ неравенство верно: $2^3>2\cdot 3+1$. Предположим, что $2^k>2k+1$ $(k\geqslant 3)$, и докажем, что

$$2^{k+1}>2(k+1)+1.$$

В самом деле,

$$2^{k+1}=2\cdot 2^k>2(2k+1)=(2k+3)+(2k-1).$$

Но $2k-1>0$ при любом натуральном k. Значит, $2^{k+1}>2k+3$, а отсюда следует, что неравенство $2^n\geqslant 2n+1$ справедливо при всех $n\geqslant 3$.

Пример 10. Доказать неравенство:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1. \qquad (7)$$

Решение. Выражение в левой части неравенства (7) представляет собой сумму дробей с последовательно растущими знаменателями от $n+1$ до $3n+1$. Так, при $n=3$ неравенство принимает следующий вид:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{10}>1.$$

При $n=1$ неравенство справедливо:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1.$$

Предположим, что

$$S_k=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{3k+1}>1,$$

и докажем, что тогда

$$S_{k+1}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{3(k+1)+1}>1.$$

Действительно,

$$S_{k+1}=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{3k+1}\right)+$$
$$+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}=$$
$$=S_k+\frac{2}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)}>S_k>1.$$

Неравенство (7) доказано.

Примеры, которые были рассмотрены до сих пор, и примеры, которые будут рассмотрены позднее, показывают, с каким успехом метод математической индукции применяется для решения самых разнообразных задач. Тем не менее силу этого метода не следует преувеличивать; бывают случаи, когда задача может быть решена методом математической индукции, но довольно сложно, в то время как каким-то другим способом задача решается и проще, и быстрее.

Более того, бывают случаи, когда для решения той или иной задачи самым естественным кажется использование метода математической индукции, однако попытка применить этот метод наталкивается на непреодолимые трудности (в основном при проведении индукционного шага).

Пусть нужно доказать неравенство:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}<2. \qquad (8)$$

Это неравенство очень похоже на неравенство (7), которое только что без особого труда было доказано методом математической индукции. Естественно и здесь попробовать применить этот метод.

При $n=1$ неравенство справедливо:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}<2.$$

Предположим, что $S_k<2$, и попробуем доказать, что тогда $S_{k+1}<2$. Но выше мы видели, что

$$S_{k+1}>S_k,$$

а потому из $S_k<2$ не следует, что $S_{k+1}<2$. Итак, доказать неравенство (8) методом математической индукции нам не удалось. Докажем неравенство (8) другим способом.

Заметим прежде всего, что при $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$ справедливо неравенство:

$$\frac{1}{n+k+1}+\frac{1}{2n-k}<\frac{3}{2n}. \qquad (9)$$

В самом деле,

$$\frac{3}{2n}-\left(\frac{1}{n+k+1}+\frac{1}{2n-k}\right)=\frac{(4n-3k)+3k(n-k)}{2n(n+k+1)(2n-k)}.$$

Так как при $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$ полученное число положительно, то неравенство (9) доказано.

Рассмотрим теперь сумму

$$S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}.$$

Так как

$$\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{n+1},\quad \frac{1}{2n+2}<\frac{1}{n+2},\quad \ldots,\quad \frac{1}{3n}<\frac{1}{2n},$$

то

$$S_n<2\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)+\frac{1}{3n+1}.$$

Если n четно, $n=2m$, то $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}=\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{2n-1}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n+m}+\frac{1}{2n-m+1}\right)$. Используя неравенство (9), получаем:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}<m\cdot\frac{3}{2n}=\frac{3}{4}.$$

Так как, кроме того $\frac{1}{3n+1} < \frac{1}{2}$, то $S_n < 2\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=2$.

Если n нечетно, $n=2m+1$, то

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}=\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n+m}+\frac{1}{2n-m+1}\right)+$$
$$+\frac{1}{n+m+1} < m\cdot\frac{3}{2n}+\frac{1}{n+m+1}=\frac{3m}{2n}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+m+1}+\frac{1}{2n-m}\right) <$$
$$<\frac{3m}{2n}+\frac{3}{4n}=\frac{3}{4}.$$

Значит, и в этом случае $S_n < 2$. Неравенство (8) доказано.

Упражнения

Доказать, что следующие неравенства справедливы для всех натуральных значений $n\geqslant 2$.

25. $(1+x)^n > 1+nx$, где $x > -1$ (неравенство Бернулли).

26. $\sqrt{n} < 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$.

27. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$.

§ 6. Доказательство неравенств

Здесь мы рассмотрим более сложные, чем в предыдущем пункте, примеры, в которых при проведении индукционного шага приходится доказывать некоторое новое неравенство или использовать метод усиления неравенства.

Пример 11. Доказать, что для положительных чисел a, b имеет место неравенство:

$$2^{n-1}(a^n+b^n)\geqslant(a+b)^n. \qquad (10)$$

Решение. При $n=1$ утверждение верно: $2^0(a^1+b^1)\geqslant$ $\geqslant(a+b)^1$. Предположим, что

$$2^{k-1}(a^k+b^k)\geqslant(a+b)^k, \qquad (11)$$

и докажем, что тогда

$$2^k(a^{k+1}+b^{k+1})\geqslant(a+b)^{k+1}. \qquad (12)$$

Для доказательства умножим обе части неравенства (11) на одно и то же положительное число $a+b$.

Получим:

$$(a+b)^{k+1} \leqslant 2^{k-1}(a^k+b^k)(a+b) = 2^k \cdot \frac{a^{k+1}+ab^k+a^kb+b^{k+1}}{2}.$$

Убедимся теперь, что

$$\frac{a^{k+1}+ab^k+a^kb+b^{k+1}}{2} \leqslant a^{k+1}+b^{k+1},$$

откуда и будет следовать неравенство (12). Рассмотрим разность

$$a^{k+1}+b^{k+1}-\frac{a^{k+1}+ab^k+a^kb+b^{k+1}}{2} = \frac{(a-b)(a^k-b^k)}{2}.$$

Из утверждения, доказанного в примере 8, следует, что числа $a-b$ и a^k-b^k имеют одинаковые знаки. Следовательно,

$$\frac{(a-b)(a^k-b^k)}{2} \geqslant 0,$$

откуда

$$\frac{a^{k+1}+ab^k+a^kb+b^{k+1}}{2} \leqslant a^{k+1}+b^{k+1}.$$

Тем самым неравенство (12) доказано, и на основании принципа математической индукции мы вправе сделать вывод о справедливости неравенства (10).

Пример 12. Доказать неравенство:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n-1} > \frac{n}{2}. \qquad (13)$$

Решение. Выражение, содержащееся в левой части неравенства (13), представляет собой сумму дробей, знаменатели которых растут от 1 до 2^n-1. При $n=1$ оно обращается в 1. Но $1 > \frac{1}{2}$, следовательно, при $n=1$ неравенство (13) справедливо.

Предположим теперь, что

$$S_k = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^k-1} > \frac{k}{2},$$

и докажем, что тогда

$$S_{k+1} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}-1} > \frac{k+1}{2}.$$

Имеем:

$$S_{k+1}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^k-1}\right)+\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{1}{2^{k+1}-1}\right)=S_k+A,$$

где $A=\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}-1}$.

Выражение A представляет собой сумму дробей, каждая из которых больше, чем $\frac{1}{2^{k+1}}$. Значит,

$$A>\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}}=2^k\cdot\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}.$$

Итак, $S_k>\frac{k}{2}$, $A>\frac{1}{2}$, отсюда $S_{k+1}=S_k+A>\frac{k+1}{2}$. Неравенство (13) доказано.

Упражнения

Доказать следующие неравенства

28. $2^{\frac{1}{2}n(n-1)}>n!$ для всех $n\geqslant 3$.

29. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}<n$.

30. $\sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c+\ldots+\sqrt{c}}}}<\frac{1+\sqrt{4c+1}}{2}$.

§ 7. Применение метода математической индукции к решению вопросов делимости

Условимся вместо фразы «делится нацело на» пользоваться знаком $\vdots$.

Пример 13. Доказать, что

$$(11^{n+2}+12^{2n+1})\,\vdots\,133.$$

Решение. Пусть $n=1$. Тогда

$$11^3+12^3=(11+12)(11^2-11\cdot 12+12^2)=23\cdot 133.$$

Но $(23\cdot 133)\,\vdots\,133$, значит, при $n=1$ утверждение верно.

Предположим, что $(11^{k+2}+12^{2k+1})\,\vdots\,133$. Докажем, что в таком случае и $(11^{k+3}+12^{2k+3})\,\vdots\,133$.

В самом деле, $11^{k+3}+12^{2k+3}=11\cdot 11^{k+2}+12^2\cdot 12^{2k+1}=$ $=11\cdot 11^{k+2}+144\cdot 12^{2k+1}=11\,(11^{k+2}+12^{2k+1})+133\cdot 12^{2k+1}$. Полученная сумма делится на 133. Утверждение доказано.

Пример 14. Доказать, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

Пример 15. Доказать, что $(3^{2n+1}+40n-67)\vdots 64$.

Решение. Если $n=1$, то $3^3+40-67=0$, а $0\vdots 64$. Пусть утверждение справедливо при $n=k$, т. е. $(3^{2k+1}+40k-67)\vdots 64$.

Докажем, что тогда $[3^{2k+3}+40(k+1)-67]\vdots 64$.

В самом деле, $3^{2k+3}+40\,(k+1)-67=9\cdot 3^{2k+1}+40k-$ $-27=9\,(3^{2k+1}+40k-67)-320k+576=9\,(3^{2k+1}+40k-67)+$ $+64\,(9-5k)$.

Но $[9\,(3^{2k+1}+40k-67)+64\,(9-5k)]\vdots 64$.

Утверждение доказано.

Упражнения

Доказать.

31. $(6^{2n}-1)\vdots 35$.

32. $(4^n+15n-1)\vdots 9$.

33. $(2^{5n+3}+5^n\cdot 3^{n+2})\vdots 17$.

34. $(6^{2n}+3^{n+2}+3^n)\vdots 11$.

§ 8. Задачи на делимость

Пример 16. Доказать, что

$$(n^4+6n^3+11n^2+6n)\vdots 24. \tag{14}$$

Решение. Нетрудно видеть, что при $n=1$ утверждение справедливо. Предположим, что $(k^4+6k^3+11k^2+$ $+6k)\vdots 24$, и докажем, что тогда

$$[(k+1)^4+6\,(k+1)^3+11\,(k+1)^2+6\,(k+1)]\vdots 24. \tag{15}$$

Имеем:

$$(k+1)^4+6\,(k+1)^3+11\,(k+1)^2+6\,(k+1)=(k^4+6k^3+$$
$$+11k^2+6k)+24\,(k^2+1)+4\,(k^3+11k).$$

Если мы теперь докажем, что при любом натуральном k

$$(k^3+11k)\vdots 6, \tag{16}$$

то этим будет доказано, что число вида

$$(k^4+6k^3+11k^2+6k)+24\,(k^2+1)+4\,(k^3+11k) \tag{17}$$

делится на 24. Перед нами новая задача, для решения которой опять используем метод математической индукции.

При $k=1$ утверждение (16) справедливо. Пусть m — любое натуральное число и пусть при $k=m$ утверждение (16) справедливо, т. е. $(m^3+11m) \vdots 6$. Докажем, что тогда утверждение справедливо и при $k=m+1$, т. е. $[(m+1)^3+11(m+1)] \vdots 6$.

В самом деле, $(m+1)^3+11(m+1)=(m^3+11m)+12+$ $+3m(m+1)$. Из двух последовательных натуральных чисел m и $m+1$ одно обязательно четно; значит, $[m(m+1)] \vdots 2$, а $[3m(m+1)] \vdots 6$. Но тогда $[(m^3+11m)+$ $+12+3m(m+1)] \vdots 6$

Утверждение (16) доказано. Отсюда следует, что числа вида (17) делятся на 24, чем утверждение (15), а с ним и (14) доказано.

Заметим, что рассмотренный пример является еще одной иллюстрацией замечания, сделанного на стр. 68. Решение его методом математической индукции несколько громоздко, проще пойти другим путем — разложив многочлен $n^4+6n^3+11n^2+6n$ на множители. Имеем:

$$n^4+6n^3+11n^2+6n=n(n+1)(n+2)(n+3).$$

Из четырех последовательных натуральных чисел n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ два числа обязательно четные, причем одно делится на 4, следовательно, их произведение делится на 8. Кроме того, по крайней мере одно из этих четырех чисел делится на 3. Отсюда следует, что $[n(n+1)(n+2)(n+3)] \vdots 24$.

Самостоятельная работа № 2

Вариант I

1. Доказать, что $2^n > n^2$ при всех $n \geqslant 5$.
2. Доказать, что $(2^{n+5} \cdot 3^{4n}+5^{3n+1}) \vdots 37$.

Вариант II

1. Доказать, что $2^n > n^3$ при всех $n \geqslant 10$.
2. Доказать, что $(7^{n+2}+8^{2n+1}) \vdots 57$.

Упражнения

Доказать.

35. $(3^{2n+2}-8n-9) \vdots 64$.
36. $(7^{n+2}+8^{2n+1}) \vdots 19$.
37. $(3^{2n+2} \cdot 5^{2n}-3^{3n+2} \cdot 2^{2n}) \vdots 1053$.
38. $(n^6-3n^5+6n^4-7n^3+5n^2-2n) \vdots 24$.

§ 9. Применение метода математической индукции при изучении свойств числовых последовательностей (прогрессий, ряда Фибоначчи)

Арифметическая и геометрическая прогрессии представляют собой простейшие примеры последовательностей, для изучения свойств которых с успехом применяется метод математической индукции. Рассмотрим еще одну последовательность, обладающую целым рядом интересных свойств.

Итальянский математик Фибоначчи в одной из своих работ рассмотрел следующую задачу: «Пара кроликов приносит раз в месяц приплод из двух крольчат (самки и самца), причем новорожденные крольчата через два месяца после рождения уже приносят приплод. Сколько кроликов появится через год, если в начале года была одна пара новорожденных кроликов?»

Из условия задачи следует, что через месяц будет одна пара кроликов, через два месяца — две пары, через три месяца приплод даст только первая пара и получится три пары кроликов. А еще через месяц приплод дадут и исходная пара кроликов, и пара, появившаяся два месяца назад, поэтому всего будет 5 пар кроликов.

Обозначим через $F(n)$ количество пар кроликов по истечении n месяцев с начала года. Мы видим, что через $(n+1)$ месяцев будут эти $F(n)$ пар и еще столько новорожденных пар кроликов, сколько пар было в конце $(n-1)$-го месяца, т. е. еще $F(n-1)$ пар кроликов. Иными словами, имеет место рекуррентное соотношение $F(n+1)=F(n)+F(n-1)$. Так как по условию $F(0)=1$, $F(1)=1$, то последовательно находим: $F(2)=2$, $F(3)=3$, $F(4)=5$, ..., $F(12)=233$.

Числа $F(n)$ называют числами Фибоначчи. Последовательность чисел 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... называется рядом Фибоначчи. Как мы видели выше, эта последовательность определяется следующими условиями:

$$a_0=1,\ a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+a_{n-1}.$$

Рассмотрим некоторые свойства этой последовательности.

Пример 17. Доказать, что ряд Фибоначчи обладает следующим свойством:

$$a_{2n+2}=a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{2n+1}+1.$$

Решение. Пусть $n=1$. Тогда $a_{2n+2}=a_4=5=1+3+1=a_1+a_3+1$. Значит, при $n=1$ утверждение справедливо.

Допустим, что оно верно при $n=k$, т. е.

$$a_{2k+2}=a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{2k+1}+1. \qquad (18)$$

Докажем, что тогда оно верно и при $n=k+1$, т. е.

$$a_{2k+4}=a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{2k+1}+a_{2k+3}+1.$$

В самом деле, по определению ряда Фибоначчи имеем: $a_{2k+4}=a_{2k+2}+a_{2k+3}$. Используя теперь предположение индукции (18), получаем:

$$a_{2k+4}=a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{2k+1}+a_{2k+3}+1,$$

что и требовалось доказать.

Пример 18. Доказать, что ряд Фибоначчи обладает следующим свойством:

$$a_n^2-a_{n-1}\cdot a_{n+1}=(-1)^n.$$

Решение. Для $n=1$ утверждение справедливо. Предположим, что

$$a_k^2-a_{k-1}\cdot a_{k+1}=(-1)^k,$$

и докажем, что тогда

$$a_{k+1}^2-a_k\cdot a_{k+2}=(-1)^{k+1}.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned}a_{k+1}^2-a_k\cdot a_{k+2}&=a_{k+1}^2-a_k(a_k+a_{k+1})=\\&=a_{k+1}(a_{k+1}-a_k)-a_k^2=a_{k+1}\cdot a_{k-1}-a_k^2=\\&=-(a_k^2-a_{k-1}\cdot a_{k+1})=-(-1)^k=(-1)^{k+1}.\end{aligned}$$

Тем самым интересующее нас свойство доказано.

Упражнения.

39. Дана арифметическая прогрессия с разностью d: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$; $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$. Доказать:

а) $a_n=a_1+d(n-1)$;

б) $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n$;

в) $S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}n$.

40. Дана геометрическая прогрессия со знаменателем q: $b_1, b_2, \ldots$.

Доказать:

а) $b_n = b_1 q^{n-1}$;

б) $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1}$;

в) $S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q-1}$.

41. Пусть $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — ряд Фибоначчи. Доказать:

а) $a_{n+2} = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + 1$;

б) $a_{2n+1} = 1 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}$.

§ 10. Свойства числовых последовательностей

Пример 19. Числовая последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ определяется следующими условиями: $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_1 \cdot a_n - a_0 a_{n-1}$.
Доказать, что $a_n = 2^n + 1$.

Решение. Нетрудно видеть, что утверждение справедливо при $n = 1$. Предположим, что оно верно при всех $n \leqslant k$, и докажем, что тогда оно верно и при $n = k + 1$, т. е. что $a_{k+1} = 2^{k+1} + 1$.

В самом деле, из определения последовательности следует, что $a_{k+1} = a_1 \cdot a_k - a_0 \cdot a_{k-1}$. В силу предположения индукции имеем:

$$a_k = 2^k + 1; \quad a_{k-1} = 2^{k-1} + 1.$$

Значит,

$$a_{k+1} = 3 \cdot (2^k + 1) - 2(2^{k-1} + 1) = 2^{k+1} + 1.$$

Теперь мы вправе сделать вывод о том, что на основании принципа математической индукции, который здесь мы впервые применили в другой форме (см. теорему на стр. 60), утверждение доказано для всех n.

Пример 20. Дана последовательность пар чисел:

$$(a, b);\ (a_1, b_1);\ (a_2, b_2); \ldots;\ (a_n, b_n);\ \ldots$$

Эти пары образуются по следующему правилу:

$$a_1 = \frac{a+b}{2},\ b_1 = \frac{a_1 + b}{2}, \ldots,\ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\ b_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_n}{2}.$$

Доказать, что

$$a_n = a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1 - \frac{1}{4^n}\right);$$
$$b_n = a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1 + \frac{1}{2\cdot 4^n}\right). \qquad (19)$$

Решение. Пусть $n=1$. Тогда $a_1 = a + \frac{2}{3}(b-a)\times \times\left(1-\frac{1}{4^1}\right)$, так как $\frac{a+b}{2} = a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{1}{4}\right)$. Имеем, далее,

$$b_1 = \frac{a_1+b}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} + b\right) = \frac{a+3b}{4}.$$

С другой стороны,

$$a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1 + \frac{1}{2\cdot 4^1}\right) = \frac{a+3b}{4}.$$

Следовательно,

$$b_1 = a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1 + \frac{1}{2\cdot 4^1}\right).$$

Этим доказано, что формулы (19) справедливы при $n=1$.

Предположим, что

$$a_k = a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1 - \frac{1}{4^k}\right);$$
$$b_k = a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1 + \frac{1}{2\cdot 4^k}\right), \qquad (20)$$

и докажем, что тогда

$$a_{k+1} = a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1 - \frac{1}{4^{k+1}}\right);$$
$$b_{k+1} = a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1 + \frac{1}{2\cdot 4^{k+1}}\right).$$

По условию $a_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$. Используя формулы (20), получим:

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}\left[a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1 - \frac{1}{4^k}\right) + \right.$$
$$\left. + a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1 + \frac{1}{2\cdot 4^k}\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[2a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1 - \frac{1}{4^k} + 1 + \frac{1}{2\cdot 4^k}\right)\right] =$$
$$= a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1 - \frac{1}{4^{k+1}}\right).$$

Далее, по условию $b_{k+1}=\frac{1}{2}(a_{k+1}+b_k)$. Используя предположение индукции (20) и только что доказанную формулу для a_{k+1}, получаем:

$$b_{k+1}=\frac{1}{2}\left[a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{1}{4^{k+1}}\right)+\right.$$
$$\left.+a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4^k}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[2a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{2}{2\cdot 4^{k+1}}+1+\frac{1}{2\cdot 4^k}\right)\right]=$$
$$=a+\frac{1}{3}(b-a)\left(\frac{2\cdot 2\cdot 4^{k+1}+2}{2\cdot 4^{k+1}}\right)=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4^{k+1}}\right).$$

Утверждение доказано.

Упражнения.

42. Числовая последовательность определяется следующими условиями: $a_0=0$, $a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}$. Доказать, что последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — возрастающая.

43. Доказать, что ряд Фибоначчи обладает следующим свойством:

$$a_{n+9}=a_{n-1}\cdot a_8+a_n\cdot a_9.$$

44. Числовая последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ определяется следующими условиями: $a_0=a$; $a_1=b$; $a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n-1}}{2}$. Доказать, что

$$a_n=\frac{a+2b}{3}+(-1)^{n-1}\frac{b-a}{3\cdot 2^{n-1}}.$$

§ 11. Разные задачи, решаемые методом математической индукции

Пример 21. Доказать, что

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\ldots+\frac{1}{100}. \quad (21)$$

Решение. Сформулируем задачу в более общем виде: доказать, что

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+$$
$$+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} \quad (22)$$

при любом натуральном значении n.

При $n=1$ левая часть тождества (22) равна $1-\frac{1}{2}$, а правая — $\frac{1}{1+1}$. Так как $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$, то при $n=1$ тождество (22) верно.

Предположим, что

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k},$$

и докажем, что тогда

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{2}{2k+2}=$$
$$=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}.$$

Действительно,

$$\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}=$$
$$=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}=$$
$$=\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)=$$
$$=\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$$

Итак, по принципу математической индукции тождество (22) доказано для всех n. При $n=50$ оно обращается в требуемое равенство (21).

Пример 22. Доказать, что число диагоналей выпуклого n-угольника равно $\frac{n(n-3)}{2}$.

Решение. При $n=3$ утверждение справедливо, ибо в треугольнике $\frac{3(3-3)}{2}=0$ диагоналей. Предположим, что во всяком выпуклом k-угольнике имеется $D_k=\frac{k(k-3)}{2}$ диагоналей. Докажем, что тогда это утверждение верно и при $n=k+1$, т. е. что в выпуклом $(k+1)$-угольнике число диагоналей

$$D_{k+1}=\frac{(k+1)(k-2)}{2}.$$

Пусть $A_1A_2\ldots A_kA_{k+1}$ — выпуклый $(k+1)$-угольник. Проведем в нем диагональ A_1A_k. Чтобы подсчитать общее число диагоналей в $(k+1)$-угольнике $A_1A_2\ldots A_kA_{k+1}$, нужно подсчитать число диагоналей в k-угольнике $A_1A_2\ldots A_k$, прибавить к полученному числу $k-2$, т. е. число диагоналей $(k+1)$-угольника $A_1A_2\ldots A_kA_{k+1}$, исходящих из вершины A_{k+1}, и, кроме того, следует учесть диагональ A_1A_k. Таким образом,

$$D_{k+1}=D_k+(k-2)+1=\frac{k(k-3)}{2}+k-1=\frac{(k+1)(k-2)}{2}.$$

Итак, по принципу математической индукции утверждение верно для любого выпуклого n-угольника.

Упражнения

45. Доказать, что сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $2d(n-2)$.

46. Доказать тождество:

$$(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n)^2=x^{2n}+2x^{2n-1}+3x^{2n-2}+\ldots$$
$$\ldots+(n+1)x^n+nx^{n-1}+\ldots+3x^2+2x+1.$$

47. Вычислить произведение $P=2^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{\frac{1}{4}}\cdot 8^{\frac{1}{8}}\cdot 16^{\frac{1}{16}}\ldots$

Контрольная работа

Вариант I

1. Доказать, что при любом натуральном n справедливо тождество:

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

2. Доказать неравенство:

$$\frac{4^n}{n+1}<\frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

3. Числовая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ определяется следующими условиями: $a_1=2$, $a_{n+1}=3a_n+1$. Доказать, что

$$a_n=\frac{1}{2}(5\cdot 3^{n-1}-1).$$

Вариант II

1. Доказать, что при любом натуральном n справедливо тождество:

$$1\cdot 2\cdot 3\ldots p+2\cdot 3\ldots p(p+1)+\ldots+n(n+1)\ldots(n+p-1)=$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}{p+1}.$$

2 Доказать неравенство:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \ldots \frac{2n-1}{2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

3 Доказать, что ряд Фибоначчи обладает следующим свойством:

$$a_n \cdot a_{n+1} = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2.$$

Вариант III

1. Доказать, что при любом натуральном n справедливо тождество:

$$2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + \ldots + (n+1) n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}.$$

2. Доказать:

$$(2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4) \vdots 25.$$

3. Доказать, что если $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$, то $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$ при любом n.

Вариант IV

1. Доказать, что при любом натуральном n справедливо тождество:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} =$$
$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right].$$

2. Доказать:

$$(5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}) \vdots 23.$$

3. Доказать:

$$(n+1)(n+2)\ldots(n+n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1).$$

Ответы и указания к упражнениям

1. а) $S_{316} = 158$; б) $S_{527} = -264$. **2.** $S_n = (-1)^n \cdot n$. **3.** $P_n = \frac{1}{n+1}$. **4.** $S_n = \frac{n}{n+1}$. **5.** $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. **6.** $S_n = n(n+1)^2$. **7.** $P_n = \frac{n+2}{2n+2}$. **8.** При $n = 1, 2, 3, \ldots, 15$ числа вида $n^2 + n + 17$ являются простыми, но при $n = 16$ получается составное число $16^2 + 16 + 17 = 17^2$. **19.** $S_n = \frac{n}{2n+1}$. **20.** $S_n = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$. **30.** Указание: задача сводится к доказательству того, что последовательность $\sqrt{c}$, $\sqrt{c+\sqrt{c}}$, $\sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c}}}$, ... ограничена сверху числом $\frac{1+\sqrt{4c+1}}{1}$; следует также учесть, что $a_{n+1} = \sqrt{c+a_n}$, где a_n и a_{n+1} — соответствующие члены последовательности. **38.** Указание: применить метод математической индукции несколько раз. **43.** Указание: воспользоваться методом математической индукции в той форме, как это было сделано в примере 19. **44.** См. указание к упр. 43. **47.** $P=4$. Указание: пусть $P_n = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{\frac{1}{8}} \ldots (2^n)^{\frac{1}{2^n}}$, тогда $P = \lim\limits_{n\to\infty} P_n$. Далее, $P_n = 2^{S_n}$, где $S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \ldots + \frac{n}{2n}$ Таким образом, задача сводится к выводу формулы для суммы S_n. Вычислив S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, можно высказать предположение, что $S_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$, которое доказывается методом математической индукции.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

П. С. Моденов

В статье в основном рассмотрены круговые преобразования плоскости, разобрано несколько задач и предложены задачи для самостоятельного решения.

В § 1 и § 2 изложены общие сведения о преобразованиях и те основные теоремы об изометрических преобразованиях и о преобразованиях подобия плоскости, которые в § 4 использованы для доказательства ряда общих теорем, относящихся к круговым преобразованиям.

Геометрические преобразования могут быть использованы в школе для решения задач по геометрии на построение, на доказательство и на вычисление.

§ 1. Общие сведения о преобразованиях

Если каждому элементу M множества R ставится в соответствие некоторый элемент M' того же множества, то говорят, что задано отображение A множества R в себя.

Элемент M' называется *образом* элемента M, а элемент M — *прообразом* элемента M'. Образ элемента M множества R при отображении A будем иногда обозначать так: $A(M)$. Отображения A и B множества R называются равными между собой, если выполнено следующее условие: пусть M — любой элемент из множества R; тогда его образ и при отображении A и при отображении B

один и тот же, т. е.

$$A(M) = B(M).$$

Итак,

$$A = B,$$

только тогда, когда выполнено равенство

$$A(M) = B(M)$$

для любого элемента M, входящего в множество R.

Если при отображении A множества R каждый элемент множества R имеет прообраз, то говорят, что *множество R отображается на себя.*

Отображение множества R на себя называется *взаимно однозначным*, если:

1°. Каждый элемент M из множества R имеет и притом только один образ M' из множества R.

2°. Каждый элемент M' из множества R имеет и притом только один прообраз M из множества R.

Пункт 2° иногда заменяют следующими двумя: 2° каждый элемент M' из множества R имеет прообраз M из множества R; 3° два любых различных элемента M и N из множества R имеют два различных образа M' и N'.

Преобразованием множества R называется взаимно-однозначное отображение множества R на себя.

Если A — преобразование множества R, то преобразование, при котором любому элементу из множества R ставится в соответствие его прообраз, называется обратным преобразованию A; оно обозначается так: A^{-1}.

Преобразование E множества R, при котором каждому элементу M множества R ставится в соответствие этот же элемент, называется единичным (или тождественным).

Если A — преобразование множества R, а A^{-1} — преобразование, обратное для A, то

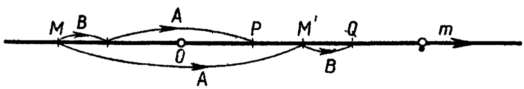
$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Замечание 1. Изложенное в этом параграфе понятие преобразования множества не следует рассматривать как определение этого понятия, а лишь как его разъяснение.

Замечание 2. В настоящей статье под множеством R будет подразумеваться в основном множество всех точек M евклидовой плоскости (иногда множество всех точек прямой или пространства); будут изучены некоторые (в основном круговые) преобразования этого множества.

Пусть A и B — два каких-нибудь преобразования множества R. Возьмем произвольный элемент M из множества R. Пусть M' — образ элемента M при преобразовании B, а M'' — образ элемента M' при преобразовании A. Тогда соответствие, при котором элементу M соответствует элемент M'', является преобразованием множества R. Это преобразование называется произведением преобразования A на преобразование B и обозначается так: AB.

Пример. Пусть R — множество всех точек какой-нибудь прямой l. Фиксируем на прямой l точку O и направленный отрезок m. Обозначим через A преобразование, при котором каждой точке M прямой l ставится в соответствие точка M', симметричная точке M относительно точки O. Обозначим через B преобразование, при котором каждой точке M прямой l ставится в соответствие



Черт. 1.

точка M', полученная переносом точки M в направлении отрезка m, причем $MM' = m$. На чертеже 1 построены образы P и Q точки M прямой l при преобразованиях AB и BA. Эти точки, вообще говоря, различны, значит,

$$AB \neq BA.$$

Этот пример показывает, что произведение преобразований (вообще говоря) некоммутативно.

Вопросы

1°. Какая точка соответствует точке O при преобразованиях AB и BA в рассмотренном примере?

2°. Существует ли в рассмотренном примере точка M, для которой

$$AB(M) = BA(M)?$$

3°. Пусть R — множество всех точек пространства. Рассмотрим две пересекающиеся и взаимно перпендикулярные прямые l и m. Пусть A — поворот вокруг прямой l на $90°$, а B — поворот вокруг прямой m на $90°$. Верно ли равенство

$$AB = BA?$$

Теорема. *Произведение преобразований множества R ассоциативно, т. е.*

$$A(BC) = (AB)C,$$

где A, B и C — любые преобразования множества R.

Доказательство. Пусть M — любой элемент множества R, M' — образ M при преобразовании C, M'' — образ M' при преобразовании B и M''' — образ M'' при преобразовании A.

На основании определения произведения преобразований элемент M'' является образом M при преобразовании BC, а, значит (опять на основании определения произведения преобразований), элемент M''' является образом элемента M при преобразовании $A(BC)$.

Далее, элемент M''' является образом элемента M' при преобразовании AB, а, значит, элемент M''' является образом элемента M при преобразовании $(AB)C$. Итак, на основании определения равенства преобразований

$$A(BC) = (AB)C.$$

Определение. *Множество G преобразований множества R называется группой, если выполнены условия:*

I. Если A и B — любые преобразования множества R, входящие в множество G, то преобразование AB также входит в множество G.

II. Если A — любое преобразование множества R, входящее в множество G, то преобразование A^{-1} также входит в множество G.

Заметим, что единичное преобразование E всегда входит в группу преобразований, так как если преобразование A входит в группу G, то на основании II преобразование A^{-1} также входит в группу G, а, значит (на основании I), в группу G входит преобразование $AA^{-1} = E$.

§ 2. Изометрические и подобные преобразования

В этом параграфе мы даем определения и некоторые теоремы об изометрических и подобных преобразованиях плоскости, которые нам понадобятся для изложения теорем инверсии и круговых преобразований плоскости (§ 3 и 4).

Определение. *Изометрическим (ортогональным) преобразованием плоскости называется преобразование A этой плоскости, обладающее следующим свойством: если M и N — две любые точки, лежащие на плоскости R, а M' и N' — их образы при преобразовании A, то отрезок*[1] *MN равен (конгруэнтен) отрезку $M'N'$:*

$$MN = M'N'.$$

Множество всех изометрических преобразований плоскости образует группу.

Ряд свойств изометрических преобразований и их классификация основаны на понятии *ориентации*. Наглядный смысл этого понятия заключается в сравнении двух треугольников, границам которых приписано определенное направление обхода. Если обход контуров двух треугольников совершается в одном направлении, то говорят, что они имеют одинаковую ориентацию, а если в противоположных направлениях, то — противоположную[2] (черт. 2).

Если какой-нибудь треугольник MNP и его образ $M'N'P'$ при изометрическом преобразовании A имеют одинаковую ориентацию, то A называется *изометрическим преобразованием первого рода или движением*.

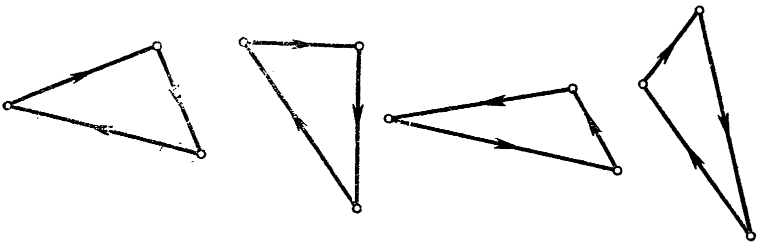
Если же треугольники MNP и $M'N'P'$ имеют противоположную ориентацию, то A называется *изометрическим преобразованием второго рода*.

---

[1] Отрезок мы здесь рассматриваем как пару точек. Равенство (конгруэнтность) отрезков (и углов) понимается здесь в том же смысле, как в курсе средней школы (и характеризуется соответствующими аксиомами).

[2] Математическое определение понятия ориентации на плоскости дано в книге П. С. Моденов и А. С. Пархоменко «Геометрические преобразования», гл. II, § 6; в дальнейшем ссылки на эту книгу будут даваться так: «Геометрические преобразования».

Пусть на плоскости R заданы четыре точки M, N, M', N' такие, что $MN = M'N'$. Тогда существует и притом только одно изометрическое преобразование первого рода, при котором отрезок $M'N'$ является образом отрезка MN. Существует и притом только одно изометри-



Черт. 2.

ческое преобразование второго рода, при котором отрезок $M'N'$ является образом отрезка[1] MN.

Основные виды изометрических преобразований первого и второго рода — это перенос, поворот, симметрия относительно точки (поворот на 180°) и симметрия относительно прямой. С этими преобразованиями учащиеся знакомятся в средней школе[2].

Отметим следующие теоремы.

Теорема 1 (Шаля). *Всякое изометрическое преобразование первого рода есть либо перенос, либо поворот (в частности, поворот на 180° вокруг некоторой точки, т. е. симметрия относительно этой точки).*

Доказательство. Пусть M — какая-нибудь точка плоскости, N — образ точки M при преобразовании A, а P — образ точки N при том же преобразовании.

Тогда возможны три случая.

1°. Отрезки MN и NP лежат на одной прямой и имеют одинаковое направление. Рассмотрим перенос T плоскости, при котором точка M переходит в точку N; тогда при этом переносе T точка N перейдет в точку P. Таким образом, при переносе T, являющемся изометрическим преобразованием первого рода, так же как и при изометрическом преобразовании A (первого рода), точки M

---

[1] См. также «Геометрические преобразования», гл. II, § 8.

[2] См. «Геометрические преобразования», гл. II, § 7.

и N переходят соответственно в точки N и P Значит, $A = T$.

2°. Отрезки MN и NP лежат на одной прямой и имеют противоположные направления. Так как A — изометрическое преобразование, то $MN = NP$ и, значит, точки M и P совпадают. Таким образом, преобразование A точку M переводит в точку N, а точку N — в точку M. Но это имеет место также и при симметрии S плоскости относительно середины O отезка AB. Так как, кроме того, A и S — изометрические преобразования первого рода, то $A = S$.

3°. Отрезки MN и NP не лежат на одной прямой. Докажем, что в этом случае преобразование A есть поворот вокруг точки O пересечения медиатрис[1] отрезков MN и NP.

В самом деле, треугольники MON и NOP равны между собой, так как $MN = NP$ в силу изометричности преобразования A и $OM = ON = OP$ по построению. Следовательно, $\angle MON = \angle NOP$. Кроме того, треугольники MON и NOP одинаково ориентированы, так как точки M и P лежат по разные стороны от прямой ON. Поэтому поворот Ω вокруг точки O, совмещающий точку M с точкой N, переводит точку N в точку P Итак, поворот Ω, являющийся изометрическим преобразованием первого рода, так же как и рассматриваемое изометрическое преобразование A первого рода, точки M и N переводит соответственно в точки N и P, а потому $A = \Omega$ (стр. 89).

Следствие. *Если A — изометрическое преобразование первого рода, при котором имеется неподвижная точка O (т. е. такая точка, образом которой при преобразовании является она сама), то $A = \Omega$, где Ω — некоторый поворот вокруг точки O.*

Теорема 2. *Всякое изометрическое преобразование A второго рода может быть представлено и притом единственным образом в виде произведения симметрии S относительно некоторой прямой l на перенос T в направлении этой прямой; при этом*

$$A = ST = TS.$$

[1] Медиатрисой отрезка называется прямая, перпендикулярная к этому отрезку и делящая его пополам.

Доказательство. Пусть M — какая нибудь точка плоскости; N — образ точки M при преобразовании A, а P — образ точки N при том же преобразовании A.

Тогда возможны три случая.

1°. Отрезки MN и NP лежат на одной прямой и имеют одинаковое направление. Пусть T — перенос плоскости, при котором точка M переходит в точку N; при этом переносе точка N перейдет в точку P. Обозначим через S симметрию плоскости относительно прямой MN. Преобразование $ST\ (=TS)$, являющееся произведением симметрии S на перенос T, так же как и изометрическое преобразование A, переводит точки M и N соответственно в точки N и P, а так как оба преобразования A и ST второго рода, то

$$A = ST = TS.$$

2°. Отрезки MN и NP лежат на одной прямой и имеют противоположные направления. Так как A — изометрическое преобразование, то $MN = NP$ и, значит, точки M и P совпадают. Рассмотрим симметрию S относительно медиатрисы отрезка MN. При симметрии S, так же как и при изометрическом преобразовании A, точки M и N переходят соответственно в точки N и M, а так как S и A — изометрические преобразования второго рода, то $A = S$.

3°. Отрезки MN и NP не лежат на одной прямой. Обозначим через l прямую, проходящую через середины отрезков MN и NP, а через Q — середину отрезка MP.

Пусть S — симметрия плоскости относительно прямой l, а T — перенос плоскости, при котором точка M переходит в точку Q. Докажем, что

$$A = ST = TS.$$

В самом деле, пусть F — образ точки M при преобразовании S. Преобразование T переведет точку F в точку N. Далее, преобразование S точку N переведет в точку Q, а преобразование T точку Q переведет в точку P. Таким образом, преобразования A и $TS\ (=ST)$ точки M и N переводят соответственно в точки N и P, а так как и A и TS — изометрические преобразования второго рода, то $A = TS = ST$.

Докажем теперь единственность такого представления. Для этого заметим, что если перенос T не сводится к тождественному преобразованию, то прямая l, относительно которой производится симметрия S и вдоль которой производится перенос T, есть единственная прямая, переходящая в себя при преобразовании A, т. е. каждая точка этой прямой имеет образ, являющийся точкой этой прямой. В самом деле, всякая прямая m, пересекающая l, переходит при преобразовании TS в прямую m', отличную от m. Любая прямая n, параллельная l, переходит при преобразовании TS в прямую n', параллельную l, но отличную от n. Поэтому если бы существовала прямая l^* такая, что преобразование A сводилось бы к произведению T^*S^* переноса T^* вдоль этой прямой на симметрию S^* относительно этой прямой, то прямая l^* должна была бы совпадать с l. Но тогда $S=S^*$, а значит, и $T=T^*$.

Следствие. *Если изометрическое преобразование A второго рода имеет неподвижную точку, то оно является симметрией относительно прямой, проходящей через эту точку.*

Вопросы

Образуют ли группу следующие множества:

1. Множество всех изометрических преобразований плоскости первого рода?

2. Множество всех изометрических преобразований плоскости второго рода?

3. Множество всех поворотов плоскости относительно одной и той же точки?

5. Множество всех поворотов плоскости относительно всех точек плоскости?

6. Рассматривается перенос A. Представить его в виде произведения двух симметрий относительно двух параллельных прямых.

Определение. *Преобразованием подобия с коэффициентом $k>0$ (или подобным преобразованием) плоскости R называется преобразование A плоскости R, обладающее следующим свойством: если M' и N' — образы двух любых точек M и N при преобразовании A, то*

$$M'N'=k\cdot MN.$$

Число k называется коэффициентом подобия.

Множество всех подобных преобразований плоскости образует группу.

Если коэффициент подобия k равен 1, то преобразование подобия является изометрическим преобразованием.

Если A — преобразование подобия (плоскости R), то A^{-1} есть преобразование подобия плоскости R, причем коэффициент подобия преобразования A^{-1} равен $\frac{1}{k}$ (k — коэффициент преобразования подобия A)[1].

При преобразовании A подобия множество всех точек любой прямой l отображается и притом взаимно однозначно на множество всех точек некоторой прямой l'; эта прямая l' называется образом прямой l, а прямая l — прообразом прямой l' при преобразовании A.

Если прямые l и m пересекаются, то и их образы l' и m' пересекаются, причем точка M' пересечения прямых l' и m' является образом точки M пересечения прямых l и m при преобразовании A.

Если прямые l и m параллельны, то параллельны и их образы l' и m'.

При преобразовании подобия A плоскости R множество всех точек любой окружности C радиуса r, лежащей на плоскости R, отображается взаимно однозначно на множество всех точек некоторой окружности C' радиуса r'; причем центр O окружности C отображается в центр O' окружности C' и $r' = kr$, где k — коэффициент подобия преобразования A. Окружность C' называется образом окружности C при преобразовании A, а окружность C — прообразом окружности C' при преобразовании A.

Подобное преобразование называется подобным преобразованием первого рода, если оно сохраняет ориентацию любого треугольника. Если же ориентация любого треугольника меняется на противоположную, то подобное преобразование называется подобным преобразованием второго рода.

Существует и притом только одно подобное преобразование первого рода, которое две точки M и N переводит соответственно в две произвольные точки M' и N'.

---

[1] Об общих свойствах преобразований подобия. См. «Геометрические преобразования», гл. III, § 14, 15.

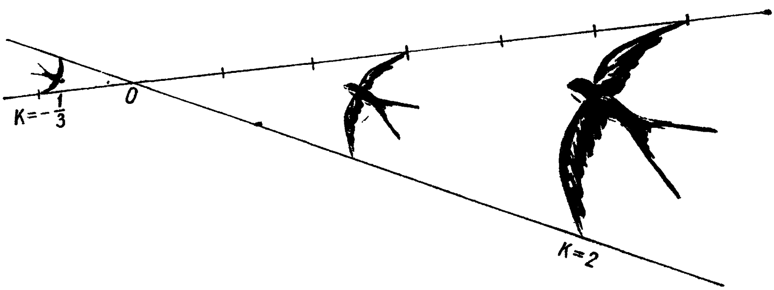
Существует и притом только одно подобное преобразование второго рода, которое две точки M и N переводит соответственно в две произвольные точки M' и N'.

Частным видом подобного преобразования является *гомотетия*. Фиксируем на плоскости точку O и фиксируем положительное число k. Гомотетией с центром O и коэффициентом k называется такое преобразование, при котором каждой точке M плоскости (или пространства) ставится в соответствие точка M', лежащая на луче OM, для которой

$$OM' = k \cdot OM.$$

Произведение $\Gamma S\ (= S\Gamma)$ гомотетии Γ с центром O и коэффициентом $k\ (> 0)$ на симметрию S относительно точки O иногда называют гомотетией с центром O и (отрицательным) коэффициентом $-k$.

Гомотетию с центром O и коэффициентом k мы будем обозначать и так: $(0;\ k)$.



Черт. 3

Гомотетия есть преобразование подобия с коэффициентом k. На чертеже 3 дан рисунок и его образы при гомотетиях $(0,\ 2)$ и $\left(0,\ -\frac{1}{3}\right)$.

Множество всех гомотетий с одним и тем же центром образует группу.

Гомотетия есть подобное преобразование первого рода.

Теорема 1. *Всякое подобное преобразование A с коэффициентом $k \neq 1$ или является гомотетией, или может быть представлено в виде произведения изометрического* *преобразования Ω на гомотетию Γ с коэффициентом k и с центром в произвольной точке O плоскости.*

Доказательство. Пусть A — подобное преобразование плоскости с коэффициентом $k \neq 1$, O — произвольная точка плоскости, O' — ее образ при преобразовании A. Пусть преобразование A какую-нибудь точку M, отличную от O, переводит в точку M'. Рассмотрим гомотетию Γ с центром в точке O и коэффициентом k.

Гомотетия Γ оставляет точку O на месте, а точку M переводит в некоторую точку M^* такую, что $OM^* = k \cdot OM$. Но $O'M' = k \cdot OM$, следовательно, $O'M' = OM^*$. Рассмотрим изометрическое преобразование Ω (того же рода, что и A), которое точки O и M^* переводит соответственно в точки O' и M'.

Преобразование $\Omega\Gamma$, так же как и преобразование A, точки O и M переводит соответственно в точки O' и M', а так как, кроме того, $\Omega\Gamma$ и A — преобразования одного рода, то

$$A = \Omega\Gamma.$$

Если точки O и M^* совпадают соответственно с точками O' и M', то Ω — тождественное преобразование и, следовательно, $A = \Gamma$, где Γ — гомотетия с центром в точке O и коэффициентом k.

Теорема 2. *Всякое подобное преобразование A плоскости есть либо изометрическое преобразование, либо гомотетия, либо представляется в виде произведения гомотетии Γ с центром в точке O на поворот Ω вокруг этой точки (включая сюда и симметрию относительно точки O — поворот на $180°$), если преобразование A первого рода, либо в виде произведения гомотетии Γ с центром O на симметрию S относительно прямой, проходящей через точку O, если преобразование A второго рода. Представление A в виде произведений указанных преобразований не зависит от их порядка и может быть осуществлено единственным образом.*

Доказательство. Пусть A — подобное преобразование с коэффициентом k. Если $k = 1$, то A — изометрическое преобразование. Во всем дальнейшем будем предполагать, что $k \neq 1$, т. е. что подобное преобразование A не является изометричным.

I. Преобразование A — подобное преобразование первого рода с коэффициентом $k \neq 1$.

Возьмем произвольную точку M, пусть N — образ точки M, а P — образ точки N при преобразовании A. Тогда

$$\frac{NP}{PM}=k.$$

Возможны три случая.

1°. Отрезки MN и NP лежат на одной прямой и имеют одинаковое направление. Возьмем на прямой MN точку O, лежащую вне отрезка MN, и такую, что

$$\frac{ON}{OM}=k.$$

Если $k>1$, то точка O лежит на продолжении отрезка MN за точку M и, следовательно, вне отрезка MP. Поэтому

$$\frac{OP}{ON}=\frac{ON+NP}{OM+MN}=\frac{k\cdot OM+k\cdot MN}{OM+MN}=k.$$

Если же $k<1$, то точка O лежит на продолжении отрезка MN за точку N и так как

$$\frac{ON}{OM}=\frac{ON}{ON+MN}=k$$

и

$$\frac{NP}{MN}=k,$$

то $ON>NP$, а потому точка O лежит и на продолжении отрезка NP за точку P. Таким образом,

$$\frac{OP}{ON}=\frac{ON-NP}{OM-MN}=\frac{k\cdot OM-k\cdot MN}{OM-MN}=k.$$

Рассмотрим гомотетию Γ с центром в точке O и коэффициентом k. Гомотетия Γ, так же как и преобразование A, точки M и N переводит соответственно в точки N и P, а так как оба эти преобразования первого рода, то $A=\Gamma$.

2°. Отрезки MN и NP лежат на одной прямой и имеют противоположные направления. Возьмем на прямой MN точку O, лежащую внутри отрезка MN, и такую, что

$$\frac{ON}{OM}=k.$$

Если $k>1$, то в силу соотношения

$$\frac{NP}{PM}=k,$$

точка P лежит на продолжении отрезка MN за точку M и потому

$$\frac{OP}{ON}=\frac{NP-ON}{MN-OM}=\frac{k\cdot MN-k\cdot OM}{MN-OM}=k.$$

Если $k<1$, то

$$\frac{ON}{OP}=k$$

и

$$\frac{NP}{MN}=\frac{NP}{MO+ON}=k$$

или

$$NP=k(OM+ON)=k\left(\frac{ON}{k}+ON\right)=ON(1+k),$$

откуда следует, что $NP>ON$, т. е. точка O лежит между точками N и P. Таким образом,

$$\frac{OP}{ON}=\frac{NP-ON}{MN-OM}=\frac{k\cdot MN-k\cdot OM}{MN-OM}=k.$$

Мы видим, что

$$\frac{ON}{OM}=\frac{OP}{ON}=k,$$

точки M и N лежат по разные стороны от точки O и точки N и P также лежат по разные стороны от точки O. Рассмотрим гомотетию Γ с центром O и коэффициентом k и симметрию S относительно точки O. Произведение $\Gamma S=S\Gamma$ этих преобразований, так же как и преобразование A, точки M и N переводит соответственно в точки N и P, а так как оба эти преобразования первого рода, то $A=\Gamma S=S\Gamma$.

3°. Отрезки NM и NP не лежат на одной прямой. Построим окружность K_1, проходящую через точки M и N и касающуюся прямой NP в точке N, и окружность K_2, проходящую через точки N и P и касающуюся прямой MN в точке N. Одна из точек пересечения этих окружностей есть точка N, обозначим другую точку их пересечения буквой O. Пусть F—точка, лежащая на продолжении отрезка PN за точку N, а L—точка, лежащая на продолжении отрезка MN за точку N. Тогда $\angle MON=\angle FNM$, так как оба они измеряются половиной дуги MN; $\angle NOQ=\angle LNP$, так как они измеряются половиной дуги NQ. Но $\angle FNA=\angle LNP$ (как вертикальные), поэтому

$$\angle MON=\angle NOP.$$

Далее, $\angle OMN = \angle ONP$, так как оба эти угла измеряются половиной дуги ON окружности K_1.

Рассмотрим поворот Ω вокруг точки O, при котором луч OM переходит в луч ON. Тогда в силу равенства $\angle MON = \angle NOP$ луч ON перейдет в луч OP. Пусть при этом повороте точки M и N перейдут соответственно в точки M^* и N^* (лежащие соответственно на лучах ON и OP). Так как поворот есть изометрическое преобразование, то $M^*N^* = MN$ и $\angle OM^*N^* = \angle OMN = \angle ONP$. Отсюда следует, что $M^*N^* \| NP$. Рассмотрим гомотетию Γ с центром в точке O, которая точку M^* переводит в точку N. Так как $M^*N^* \| NP$, то точка N^* при этой гомотетии перейдет в точку P. Коэффициент гомотетии Γ будет равен:

$$\frac{NP}{M^*N^*} = \frac{NP}{MN} = k.$$

Произведение $\Omega\Gamma = \Gamma\Omega$ поворота Ω на гомотетию Γ, так же как и преобразование A, точки M и N переводит соответственно в точки N и P, а так как преобразования $\Omega\Gamma$ и A — оба первого рода, то

$$\Omega\Gamma = \Gamma\Omega = A.$$

Теперь докажем, что если A — подобное преобразование первого рода представляется в виде произведения поворота на гомотетию с центром в неподвижной точке поворота, то такое представление A возможно осуществить лишь единственным образом.

В самом деле, если подобное преобразование $A = \Omega\Gamma$, где Ω — поворот вокруг некоторой точки O (включая и поворот на 180°), а Γ — гомотетия относительно этой точки, то O — единственная неподвижная точка преобразования A. Поэтому если A представлено еще в виде произведения $\Omega^*\Gamma^*$, где Ω^* — поворот вокруг точки O^*, а Γ^* — гомотетия относительно точки O^*, то точки O^* и O совпадают. Из равенства

$$\Omega\Gamma = \Omega^*\Gamma^*$$

следует, что

$$\Gamma\Gamma^{*-1} = \Omega^*\Omega^{-1}.$$

Но произведение $\Omega^*\Omega^{-1}$ поворотов вокруг точки O есть снова поворот или тождественное преобразование, значит, $\Gamma\Gamma^{*-1}$ есть также поворот или тождественное преобразование. Произведение $\Gamma\Gamma^{*-1}$ гомотетий относительно одной и той же точки не может быть поворотом вокруг этой точки, значит, $\Gamma\Gamma^{*-1}$ есть тождественное преобразование, откуда $\Gamma = \Gamma^*$, а потому $\Omega = \Omega^*$.

II. Преобразование A — подобное преобразование второго рода с коэффициентом $k \neq 1$.

Возьмем произвольную точку M, и пусть N — ее образ. Пусть P — образ точки N при рассматриваемом преобразовании A. Тогда

$$\frac{NP}{MN} = k.$$

1°. Отрезки MN и NP лежат на одной прямой l и имеют одинаковое направление.

Как было уже доказано (см. выше, I, 1°), существует гомотетия Γ с коэффициентом k и с центром в точке O, лежащим на прямой l, которая переводит точку M в точку N, а точку N — в точку P. Обозначим через S симметрию относительно прямой l. Симметрия S все точки прямой l оставляет на месте. Поэтому произведение гомотетии Γ на симметрию S, так же как и преобразование A, точки M и N переводит соответственно в точки N и P, а так как преобразования $\Gamma S = S\Gamma$ и A — оба второго рода, то $A = \Gamma S = S\Gamma$.

2°. Отрезки MN и NP лежат на одной прямой l и имеют противоположные направления. В этом случае существует гомотетия Γ с коэффициентом k и с центром в точке O, лежащим на прямой l (см. I, 2°), такая, что произведение этой гомотетии на симметрию относительно точки O переводит точки M и N соответственно в точки N и P. Обозначим через S симметрию относительно прямой l^*, проходящей через точку O перпендикулярно прямой l. Симметрия S переводит каждую точку прямой l в точку, ей симметричную относительно точки O. Поэтому произведение гомотетии Γ на симметрию S, так же как и преобразование A, точки M и N переводит соответственно в точки N и P, а так как преобразования $\Gamma S = S\Gamma$ и A — оба второго рода, то $A = \Gamma S = S\Gamma$.

3°. Отрезки MN и NP не лежат на одной прямой. Возьмем на отрезках MN и NP соответственно точки F и L такие, что $NF:FM = PL:LN = k \neq 1$. Пусть M^* и N^* — точки, симметричные точкам M и N относительно прямой FL. Точки M и P лежат по одну сторону от прямой FL, а точка N — по другую, поэтому точки M^* и N^* лежат по одну сторону от прямой FL (а M, N^* и P — по другую). Отношение расстояний точек N и M^* до прямой FL равно $k \neq 1$, поэтому эти расстояния различны и, следовательно, прямая M^*N пересекает прямую FL в некоторой точке O, которая лежит вне отрезка M^*N, так как точки M^* и N лежат по одну сторону от прямой FL.

Так как

$$\frac{PF}{FN} = k,$$

то

$$FN = \frac{NP}{k+1} = \frac{k}{k+1} MN,$$

а так как

$$\frac{NF}{FM} = k,$$

то

$$FN = \frac{k}{k+1} MN$$

и, значит, $NL = FN$, значит, $\angle NFL = \angle NLF$. Так как точки M^* и N^* симметричны точкам M и N относительно FL, то $\angle N^*FL = \angle NFL$, следовательно, $\angle N^*FL = \angle NLF$ и, значит, $M^*N^* \parallel NP$.

Докажем, что прямая N^*P проходит через точку O. Обозначим через P^* точку пересечения прямых NP и ON^*. Так как $M^*N^* \parallel NQ$, то $P^*L : LN = N^*F : FM^* = FN : FM = k$, но $PL : LN = k$, следовательно, точка P^* совпадает с точкой P. Так как $\triangle OM^*N^*$ подобен $\triangle ONP$, то

$$\frac{ON}{OM^*} = \frac{NP}{M^*N^*} = \frac{NP}{MN} = k.$$

Рассмотрим симметрию S относительно прямой FL. Эта симметрия переводит точки M и N соответственно в точки M^* и N^*. Гомотетия Γ с центром в точке O и коэффициентом k переведет точку M^* в точку N, а потому точку N^* — в точку P (так как $M^*N^* \parallel NP$ и образ точки N^* должен лежать на луче ON^*). Таким образом, преобразование $\Gamma S = S\Gamma$, так же как и преобразование A, переводит точки M и N соответственно в точки N и P, а так как оба они второго рода, то $A = \Gamma S = S\Gamma$.

Докажем теперь, что если подобное преобразование A второго рода представляется в виде произведения симметрии S относительно прямой l на гомотетию Γ с центром в точке O, лежащей на прямой l, то такое представление единственно. В самом деле, O — единственная неподвижная точка преобразования A. Поэтому если преобразование A будет представлено в виде произведения $S^*\Gamma^*$ симметрии S^* относительно прямой l^* на гомотетию Γ^* относительно точки O^*, лежащей на прямой l^*, то точки O^* и O будут совпадать. Теперь из равенства

$$S\Gamma = S^*\Gamma^*$$

следует, что

$$S^{*-1}S = \Gamma^*\Gamma^{-1}.$$

Произведение $S^{*-1}S$ симметрий относительно прямых, проходящих через одну и ту же точку O, есть поворот или тождественное преобразование. Произведение $\Gamma^*\Gamma^{-1}$ гомотетий относительно точки O есть гомотетия с центром в этой точке или тождественное преобразование. Но $S^{*-1}S = \Gamma^*\Gamma^{-1}$, значит, оба эти преобразования тождественные и потому $S = S^*$ и $\Gamma = \Gamma^*$.

Теорема 3. Пусть A — преобразование плоскости, обладающее следующими свойствами:

1°. Образы M', N', P' любых трех точек M, N, P, принадлежащих одной прямой, также принадлежат одной прямой.

2°. Образы M', N', P', Q' любых четырех точек M, N, P, Q, принадлежащих одной окружности, также принадлежат одной окружности. Тогда A — преобразование подобия[1].

Пример 1. 1°. Во всяком треугольнике ABC три точки: точка H пересечения высот, точка G пересечения медиан и центр O описанной окружности лежат на одной прямой; точка G лежит между точками O и H и делит отрезок OH в отношении 1:2, т. е.

$$OG:GH = 1:2.$$

2°. Середины сторон треугольника ABC, основания его высот и середины отрезков, соединяющих точку пересечения высот с вершинами, лежат на одной окружности S, называемой окружностью Эйлера. Радиус окружности Эйлера равен половине радиуса описанной окружности; центр ω окружности Эйлера есть середина отрезка OH,

[1] См. замечание в конце статьи на странице 141.

концами которого являются центр описанной окружности и точка пересечения высот.

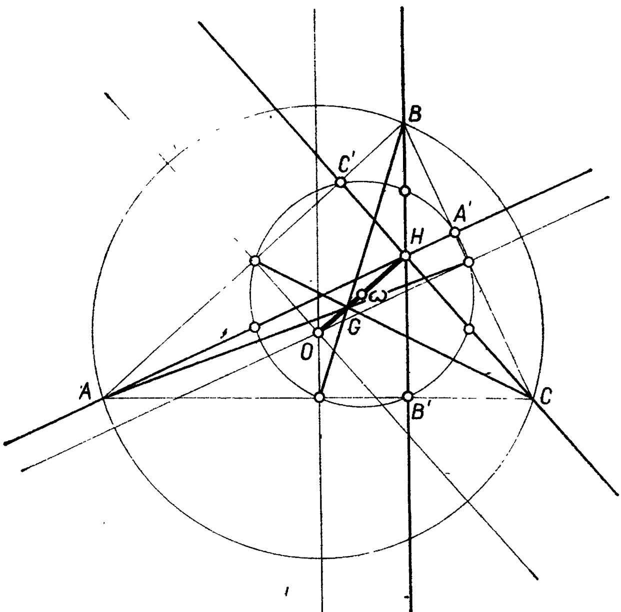
Доказательство. Рассмотрим гомотетию Г с центром G и коэффициентом $k = -\frac{1}{2}$. При этой гомотетии вершины A, B, C треугольника ABC перейдут в середины противоположных сторон, а потому высоты треугольника перейдут в медиатрисы его сторон (так как при гомотетии каждая прямая переходит в прямую, ей параллельную). Значит, точка H пересечения высот треугольника при гомотетии Г перейдет в точку O пересечения медиатрис его сторон т. е. в центр окружности, описанной около треугольника ABC. Отсюда следует, что точки H и O лежат по разные стороны от точки G и $OG:GH = 1:2$.

Окружность K, описанная около треугольника ABC, перейдет в окружность S, проходящую через середины сторон треугольника, причем центр ω этой окружности будет образом точки O при гомотетии Г, т. е. середина отрезка OH; радиус же окружности S, проходящей через середины сторон треугольника, будет в два раза меньше радиуса окружности K, описанной около треугольника ABC, так как абсолютная величина коэффициента гомотетии равна $\frac{1}{2}$. Так как центр ω окружности S есть середина отрезка OH, то он равноудален от проекций точек O и H на стороны треугольника ABC. Но проекции точки H на стороны треугольника ABC являются основаниями его высот; следовательно, окружность S пройдет и через основания высот треугольника ABC.

Теперь рассмотрим гомотетию Γ_1 с центром H и коэффициентом $k = \frac{1}{2}$. При гомотетии Γ_1 точка O (так же как и при гомотетии Г) перейдет в середину ω отрезка HO, а описанная окружность K перейдет, следовательно, в окружность с центром ω и радиусом, в два раза меньшим радиуса окружности K. Значит, при гомотетии Γ_1 окружность K (как и при гомотетии Г) перейдет в окружность S. Но при гомотетии Γ_1 точки A, B и C перейдут соответственно в середины отрезков HA, HB и HC, которые будут лежать на окружности S.

Окружность S называется окружностью девяти точек или окружностью Эйлера для треугольника ABC.

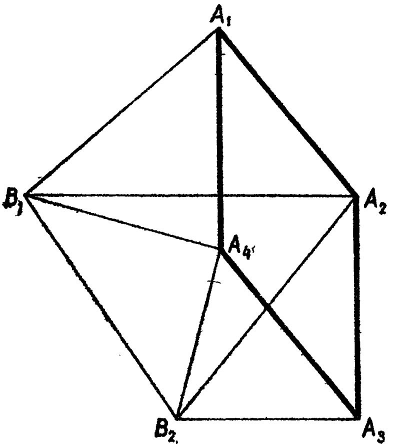
Замечание. Рассмотрим гомотетию $\Gamma_2=(H, 2)$. При этой гомотетии точка ω перейдет в точку O, а окружность Эйлера — в окружность с центром в точке O и радиусом, в два раза большим радиуса окружности Эйлера. Таким образом, при гомотетии Γ_2 окружность Эйлера перейдет в окружность, описанную вокруг треугольника ABC. С другой стороны, при гомотетии Γ_2 проекции A', B', C' вершин A, B, C треугольника ABC соответственно на его стороны BC, CA и AB перейдут в точки, симметричные точке H соответственно относительно прямых BC, CA и AB. Но точки A', B', C' лежат на окружности Эйлера, значит, точки, симметричные точке H пересечения высот треугольника относительно его сторон, лежат на окружности, описанной около этого треугольника (черт. 4).



Черт. 4

Пример 2. Построим в одной плоскости три треугольника $B_1A_1A_2$, $A_2A_3B_2$, $B_1A_4B_2$, которые подобны и имеют одинаковую ориентацию. Доказать, что четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$ — параллелограмм.

Решение. Так как треугольники $B_1A_1A_2$ и $B_1A_4B_2$ подобны и имеют одинаковую ориентацию, то, производя поворот плоскости вокруг точки B_1 на угол $\varphi = (B_1A_1, B_1A_2)$ и затем гомотетию с центром B_1 и коэффициентом $B_1A_2 : B_1A_1$, заключаем, что точка A_1 перейдет в точку A_2, а, значит, точка A_4 — в точку B_2; таким образом, треугольник $B_1A_1A_4$ перейдет в треугольник $B_1A_2B_2$, значит, угол (A_1A_4, A_2B_2) также равен φ. Но угол (A_2A_3, A_2B_2) также равен φ, так как треугольники $B_1A_1A_2$ и $A_2A_3B_2$ подобны и имеют одинаковую ориентацию. Значит, $(A_1A_4, A_2B_2) = (A_2A_3, A_2B_2)$ и, значит, прямые A_1A_4 и A_2A_3 параллельны. Аналогично устанавливаем (это рекомендуется проделать читателю), что A_1A_2 и A_3A_4 параллельны и, значит, $A_1A_2A_3A_4$ — параллелограмм (черт. 5).



Черт. 5

§ 3. Инверсия

Фиксируем на плоскости окружность (O, r) (O — ее центр, r — радиус). *Инверсией* относительно этой окружности называется такое преобразование плоскости, при котором каждой точке M, отличной от O, ставится в соответствие точка M', лежащая на луче OM, и такая, что

$$OM \cdot OM' = r^2.$$

Точка O называется *полюсом* или *центром* инверсии; r^2 называется *степенью* инверсии; окружность (O, r) называется *окружностью* инверсии.

Инверсию с полюсом O и степенью r^2 будем обозначать так: (O, r^2) или одной буквой, например I.

Образ M' точки M при инверсии $(0, r^2)$ строится так:

1. Если точка M лежит вне окружности инверсии, то проводим из точки M касательную MT к этой окружности (T — точка прикосновения); проекция M' точки T на OM и есть образ точки M.

2. Если точка M лежит внутри окружности инверсии, то через точку M проводим прямую, перпендикулярную OM; пусть T — одна из точек пересечения этого перпендикуляра с окружностью K; тогда касательная к окружности K в точке T пересечет OM в точке M', являющейся образом M при инверсии (O, r^2).

В самом деле, в обоих случаях

$$OM \cdot OM' = r^2.$$

Отсюда следует, что все точки, лежащие вне окружности инверсии, перейдут при инверсии (O, r^2) внутрь этой окружности, а все точки, лежащие внутри указанной окружности, перейдут во внешние ее точки; любая точка M окружности инверсии переходит в себя, так как для любой такой точки $OM \cdot OM' = r^2$.

Произведение $I\Sigma (= \Sigma I)$ инверсии $I = (0, r^2)$ на симметрию Σ относительно точки O иногда называют инверсией с полюсом O и степенью $-r^2$ и обозначают так: $(O, -r^2)$.

Такую инверсию называют отрицательной.

Отметим, что если при инверсии I точке M соответствует точка M', то точке M' соответствует точка M, т. е. квадрат инверсии I есть тождественное преобразование: $I^2 = E$. Преобразование называется *инволюционным*, если его квадрат есть тождественное преобразование. Следовательно, инверсия — инволюционное преобразование.

Теорема 1. *При инверсии всякие четыре точки, лежащие на окружности, не проходящей через полюс инверсии, переходят в четыре точки, также лежащие на окружности, не проходящей через полюс инверсии.*

Доказательство. Рассмотрим инверсию (O, r^2). Пусть A, B, C, D — какие-нибудь четыре точки, лежащие на окружности S, не проходящей через полюс O инверсии.

Обозначим через A', B', C' D' образы точек A, B, C, D при инверсии I; тогда

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC' = OD \cdot OD' = r^2. \qquad (1)$$

Обозначим через A_0, B_0, C_0, D_0 вторые точки пересечения прямых OA, OB, OC, OD с окружностью S; эти точки A_0, B_0, C_0, D_0 существуют, так как точки A, B, C, D лежат на окружности S, а если прямая имеет с окружностью одну общую точку M, то она имеет с ней еще одну общую точку M_0 (в частности, совпадающую с M, если рассматриваемая прямая касается окружности S). Тогда или в силу постоянства произведения отрезков хорд, проходящих через одну и ту же точку O, если O лежит внутри окружности S, или в силу постоянства произведения секущих, проходящих через одну и ту же точку O, на их внешние части, если точка лежит вне окружности S, имеют место равенства:

$$OA \cdot OA_0 = OB \cdot OB_0 = OC \cdot OC_0 = OD \cdot OD_0 = \sigma. \qquad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) находим:

$$\frac{OA'}{OA_0} = \frac{OB'}{OB_0} = \frac{OC'}{OC_0} = \frac{OD'}{OD_0} = \frac{r^2}{\sigma},$$

т. е. A', B', C', D' являются соответственно образами точек A_0, B_0, C_0, D_0 при гомотетии Γ с центром O и коэффициентом $\frac{r^2}{\sigma}$ или образами точек A_0, B_0, C_0, D_0 при преобразовании $\Gamma\Sigma$, где Σ — симметрия относительно точки O (это в случае, если точка O лежит между точками A_0 и A', между точками B_0 и B', между точками C_0 и C' и, наконец, между точками D_0 и D'), а потому так же, как и точки A_0, B_0, C_0, D_0, лежат на одной окружности S'. Окружность S' получается из окружности S при гомотетии $\Gamma = \left(0, \frac{r^2}{\sigma}\right)$ или при преобразовании $\Gamma\Sigma$.

Следствие 1. *При инверсии всякая окружность S, не проходящая через центр инверсии, отображается взаимно однозначно на некоторую окружность S', также не проходящую через центр инверсии.*

В самом деле, пусть S — произвольная окружность, не проходящая через центр O инверсии (O, r^2), а S' — образ S при гомотетии $\Gamma = \left(O, \frac{r^2}{\sigma}\right)$ (или при преобразовании $\Gamma\Sigma$).

Тогда:

1) любой точке M окружности S при инверсии (O, r^2) соответствует точка M', лежащая на окружности S' (точка M' получается из точки[1] M_0 при гомотетии Γ или при преобразовании $\Gamma\Sigma$);

[1] M_0 — вторая точка пересечения прямой OM с окружностью S.

2) любая точка M' окружности S имеет при инверсии $I=(O, r^2)$ (или при преобразовании $\Gamma\Sigma$) прообраз M, лежащий на окружности S (который является прообразом M'_0)[1];

3) наконец, двум различным точкам M_1 и M_2 окружности S соответствуют (в силу определения инверсии) две различные точки M'_1 и M'_2.

Следствие 2. *Если R — радиус окружности S, R' — радиус окружности S' при инверсии (O, r^2), а $\sigma = OP \cdot OQ$, где P и Q — точки пересечения с окружностью S произвольной прямой, проходящей через точку O, то*

$$\frac{R'}{R} = \frac{r^2}{\sigma}.$$

Замечание. $\sigma = |d^2 - R^2|$, где d — расстояние от полюса O инверсии до центра окружности S.

Теорема 2. *При инверсии всякие четыре точки, лежащие на окружности, проходящей через полюс инверсии, переходят в четыре точки, лежащие на одной прямой, не проходящей через полюс инверсии (мы пока предполагаем, что ни одна из рассматриваемых точек не совпадает с центром инверсии).*

Доказательство. Пусть A, B, C, D — четыре точки, лежащие на одной окружности S, проходящей через полюс O инверсии (O, r^2) (причем ни одна из точек A, B, C, D не совпадает с O). Пусть E — точка, диаметрально противоположная точке O на окружности S. Обозначим через E' образ точки E при инверсии (O, r^2). Проведем через точку E' прямую l, перпендикулярную OE, и обозначим через A', B', C', D' точки пересечения прямых OA, OB, OC, OD с прямой l. Если точка A совпадает с E, то ее образ A' при инверсии (O, r^2) совпадает с образом E' точки E при той же инверсии, т. е. точка A' лежит на прямой l. Если же точка A не совпадает с E, то OAE — прямоугольный треугольник с прямым углом A (OE — диаметр окружности S). С другой стороны, $A'E' \perp OE'$. Отсюда следует, что вокруг четырехугольника $AA'E'E$ можно описать окружность (углы A и E' прямые), а потому $OA \cdot OA' = OE \cdot OE' = r^2$, т. е. A' — образ A при инверсии (O, r^2). Аналогично доказывается, что точки B', C', D' пересечения прямых OB, OC, OD

[1] M'_0 — вторая точка пересечения прямой OM' с окружностью S'.

с прямой l являются образами точек B, C, D при инверсии (O, r^2).

Следствие 1. *Всякая окружность S, проходящая через полюс инверсии, отображается взаимно однозначно на прямую, не проходящую через полюс инверсии* (из окружности исключается полюс O инверсии).

Следствие 2. *При инверсии любая прямая, не проходящая через полюс инверсии, отображается взаимно однозначно на некоторую окружность, проходящую через полюс инверсии* (из окружности исключается полюс O инверсии).

Теорема 3. *При инверсии любые четыре точки, лежащие на одной прямой, проходящей через полюс инверсии, переходят в четыре точки, лежащие на той же прямой* (мы сейчас предполагаем, что ни одна из рассмотренных четырех точек не совпадает с центром инверсии).

Теорема 4. *Угол между двумя пересекающимися окружностями, угол между окружностью и пересекающей ее прямой и угол между двумя пересекающимися прямыми сохраняется при преобразовании инверсии*[1].

Доказательство. Сначала заметим, что при инверсии сохраняется касание окружностей и касание окружности с прямой. Рассмотрим две пересекающиеся окружности C_1 и C_2. Пусть M — одна из точек пересечения окружностей C_1 и C_2, отличная от полюса O инверсии, а l_1 и l_2 — касательные к окружностям C_1 и C_2 в точке M их пересечения; тогда угол между l_1 и l_2 и будет по определению углом между пересекающимися окружностями C_1 и C_2. Если прямые l_1 и l_2 не проходят через полюс O инверсии, то их образами будут окружности l'_1 и l'_2, диаметры которых, проходящие через O, будут перпендикулярны l_1 и l_2, а потому угол между касательными к окружностям l'_1 и l'_2 в точке O будет равен углу между l_1 и l_2. Но в силу сохранения касания при инверсии угол между l'_1 и l'_2 будет равен углу между образами C'_1 и C'_2 окружностей[2] C_1 и C_2.

---

[1] Углом между двумя пересекающимися окружностями называется угол между касательными к этим окружностям в их общей точке. Углом между окружностью и пересекающей ее прямой называется угол между этой прямой и касательной к окружности в точке их пересечения.

[2] Заметим, что C'_1 и C'_2 могут быть прямыми линиями.

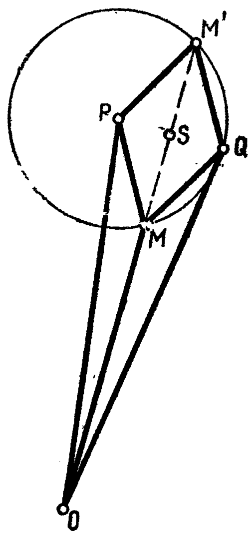
Если одна из прямых l_1 и l_2, например l_1, проходит через полюс инверсий, то при преобразовании инверсии она перейдет в себя; прямая l_2 перейдет в окружность l'_2, диаметр которой, проходящий через O, будет перпендикулярен к l_2 и, значит, касательная к l'_2 в точке O будет параллельна l_2; угол между l'_1 и l'_2 будет опять равен углу между l_1 и l_2. Наконец, если обе прямые l_1 и l_2 проходят через полюс инверсии, т. е. пересекаются в полюсе O инверсии, то точка O лежит на обеих окружностях C_1 и C_2; эти окружности перейдут в прямые C'_1 и C'_2, параллельные l_1 и l_2.

Замечание. Можно было бы показать, что при инверсии сохраняются углы между всякими двумя пересекающимися кривыми, имеющими касательные в каждой своей точке. Преобразования, при которых сохраняются углы между кривыми, называются *конформными*. Таким образом, инверсия является конформным преобразованием.

Теперь остановимся на приборах, называемых инверсорами, позволяющих непрерывным движением начертить образ L' линии L при инверсии.

Инверсор Поселье. Пусть $MPM'Q$ — ромб; O — точка, равноудаленная от точек P и Q ($OP = OQ$). Предположим, что ромб шарнирный, точка O неподвижна и соединена шарнирами с P и Q.

Тогда если точка M описывает какую-нибудь линию L, то точка M' описывает линию L', являющуюся образом линии L при инверсии $(O, OP^2 - PM^2)$ (черт. 6).



Черт. 6

Доказательство. Точки M, M' и O находятся на равных расстояниях от точек P и Q, а потому лежат на медиатрисе отрезка PQ. Построим окружность $(P; PM)$. Произведение OM, OM' равно:

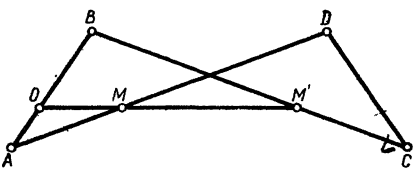
$$OP^2 - PM^2.$$

В самом деле, пусть S — середина отрезка PQ, тогда

$$OM \cdot OM' = (OS - OM)(OS + OM') =$$
$$= (OS - SM)(OS + SM) = OS^2 - SM^2 = OP^2 - SP^2 -$$
$$-(MP^2 - SP^2) = OP^2 - MP^2.$$

Отметим, что, в частности, если точка M описывает окружность, проходящую через точку O, то точка M' описывает прямую. Таким образом, инверсор Поселье, как и инверсор Гарта (см. ниже), позволяет механически преобразовать круговое движение в прямолинейное.

Инверсор Гарта. Пусть $ABCD$ — антипараллелограмм (т. е. $ABDC$ — равнобочная трапеция, BD и AC — ее параллельные стороны, AD и BC — диагонали). Фиксируем на отрезке AB точку O. Фиксируем на отрезке AD точку M, а на отрезке BC — точку M' так, чтобы точки O, M и M' принадлежали одной прямой. В точках A, B, C, D; O — шарниры; точка O неподвижна.



Черт. 7

Если при этих условиях деформировать антипараллелограмм $ABCD$, то произведение $OM \cdot OM'$ будет оставаться постоянным, т. е. если точка M описывает линию L, то точка M' описывает линию, полученную из линии L инверсией с полюсом O (черт. 7).

Доказательство. Если антипараллелограмм $ABCD$ шарнирный, то при его деформировании он остается антипараллелограммом[1].

С другой стороны, прямые OM и OM', параллельные основаниям BD и AC трапеции в первоначальном положении фигуры, будут все время оставаться им параллельными.

В самом деле:

$$\frac{AM}{AD} = \frac{AO}{AB} \text{ и } \frac{BM'}{BC} = \frac{BO}{AB};$$

---

[1] См., например: Ж. Адамар. Элементарная геометрия, ч. I, Планиметрия, изд. 2. Учпедгиз, 1938, гл. VI, п. 46а, стр. 53 и 54.

эти пропорции при деформировании антипараллелограмма сохраняются. В частности, из сказанного следует, что точки O, M и M' остаются на одной прямой.

Далее из подобных треугольников находим:

$$\frac{OM}{BD}=\frac{AO}{AB};$$

$$\frac{OM'}{OB}=\frac{AC}{AB};$$

отсюда

$$OM\cdot OM'=\frac{OA\cdot OB}{AB^2}\cdot BD\cdot AC.$$

Но вокруг трапеции $ABCD$ можно описать окружность, поэтому

$$AB^2+BD\cdot AC=AD^2\ [1]$$

и, значит,

$$BD\cdot AC=AD^2-AB^2 \tag{1}$$

и окончательно:

$$OM\cdot OM'=\frac{OA\cdot OB}{AB^2}(AD^2-AB^2).$$

Поэтому точка M' получается из точки M при инверсии с полюсом O и степенью инверсии

$$k=\frac{OA\cdot OB}{AB^2}(AD^2-AB^2).$$

§ 4. Круговые преобразования

При инверсии $(O,\ r^2)$ полюсу O инверсии не соответствует ни одна точка плоскости.

Чтобы инверсия $(O,\ r^2)$ являлась взаимно однозначным отображением плоскости на себя, т. е. преобразованием, добавим к евклидовой плоскости одну бесконечно удаленную точку.

Евклидову плоскость, пополненную одной бесконечно удаленной точкой, будем называть *конформной плоскостью*. Любую точку этой плоскости, отличную от бесконечно удаленной, будем называть *собственной*.

---

[1] Это соотношение следует из теоремы Птолемея: во всяком выпуклом вписанном в окружность четырехугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон. Оно может быть получено и без применения теоремы Птолемея.

Условимся считать, что эта бесконечно удаленная точка лежит на любой прямой евклидовой плоскости и не лежит ни на одной из окружностей евклидовой плоскости.

Две пересекающиеся прямые на конформной плоскости, как и две пересекающиеся окружности, имеют две общие точки: одну — «на конечном расстоянии», другую — «бесконечно удаленную».

Две параллельные прямые имеют на конформной плоскости общую бесконечно удаленную точку; мы будем говорить тогда, что они *касаются* друг друга в этой точке.

Условимся при инверсии (O, r^2) точке O ставить в соответствие бесконечно удаленную точку, а бесконечно удаленной точке — точку O. Теперь можно высказать следующие два положения:

1. Инверсия конформной плоскости есть взаимно однозначное отображение плоскости на себя, т. е. инверсия есть преобразование.

2. При инверсии сохраняется касание окружностей и прямых. Условимся прямую конформной плоскости называть окружностью «бесконечно большого радиуса».

Будем называть *круговым преобразованием конформной плоскости* всякое преобразование этой плоскости, при котором любые четыре точки, лежащие на одной окружности, переходят в четыре точки, также лежащие на одной окружности, понимая под окружностью, в частности, и прямую — окружность бесконечно большого радиуса.

Теорема 1. (Основная теорема.) *Всякое круговое преобразование K есть или подобие, или инверсия, или может быть представлено в виде произведения подобия на инверсию.*

Доказательство. Случай I. Круговое преобразование K оставляет на месте бесконечно удаленную точку.

В этом случае любые три собственные точки плоскости, лежащие на одной прямой, переходят в три собственные точки, также лежащие на одной прямой. В самом деле, прямая, на которой лежат рассматриваемые три точки, проходит через бесконечно удаленную точку. Эта прямая должна перейти или в прямую, или в окружность, но в окружность она перейти не может, так как бесконечно удаленная точка неподвижна.

Кроме того, преобразование K окружность переводит в окружность и потому является подобием (стр. 101).

Итак, круговое преобразование конформной плоскости, оставляющее на месте бесконечно удаленную точку, есть подобие.

Случай II. Круговое преобразование K конформной плоскости переводит бесконечно удаленную точку в собственную точку O.

Рассмотрим инверсию I с полюсом O. Инверсия I есть круговое преобразование. Поэтому произведение KI есть также круговое преобразование; это круговое преобразование оставляет на месте бесконечно удаленную точку и потому является подобием:

$$KI = \Pi.$$

Отсюда

$$(KI)I = \Pi I, \quad \text{или} \quad K(II) = \Pi I.$$

Но $I^2 = E$ — единичное преобразование, значит,

$$K = \Pi I.$$

Замечание. Инверсия I так же, как и данное круговое преобразование K, бесконечно удаленную точку переводит в собственную точку O, а потому в силу ($K = \Pi I$) подобие Π оставляет точку O на месте. Значит, подобие Π есть произведение некоторой гомотетии с центром O на поворот вокруг точки O или произведение гомотетии с центром O на симметрию относительно прямой, проходящей через точку O.

Теорема 2. *Если круговое преобразование K не является подобием, то его можно представить в виде произведения $K = \Omega I$ ортогонального преобразования Ω, имеющего неподвижную точку O, на инверсию I с центром в этой точке O. Это представление K единственно, причем*

$$\Omega I = I\Omega.$$

Доказательство. Так как преобразование K не является подобием, то бесконечно удаленная точка переходит при этом преобразовании в собственную точку O.

Пусть M — произвольная собственная точка плоскости, отличная от O, а M' — ее образ при преобразовании K.

Возьмем за центр инверсии I точку O, а за коэффициент инверсии число $k = OM \cdot OM'$. Пусть P — образ точки M при инверсии I; тогда точка P лежит на луче OM и при этом

$$OP \cdot OM = OM \cdot OM',$$

откуда $OP = OM'$. Мы видим, что инверсия I с центром O и коэффициентом $k = OM \cdot OM'$ переводит точку M в точку P, находящуюся от O на том же расстоянии, на котором находится от точки O образ M' точки M при преобразовании K. Значит, подобие Π в формуле $K = \Pi I$ сводится или к повороту Ω вокруг O, или к симметрии относительно прямой, проходящей через точку O:

$$K = \Omega I.$$

Остается доказать единственность такого представления K. Предположим, что $K = \Omega_1 I_1$, где I_1—инверсия с центром O, а Ω_1—поворот вокруг O. Из равенства

$$\Omega I = \Omega_1 I_1$$

следует:

$$\Omega_1^{-1}\Omega = I_1 I.$$

Так как множество изометрических преобразований образует группу, то $\Omega_1^{-1}\Omega$ есть изометрическое преобразование. Но $I_1 I = \Omega_1^{-1}\Omega$, значит, $I_1 I$ есть изометрическое преобразование. Но произведение двух инверсий с коэффициентами r^2 и r_1^2 и с одним и тем же центром O есть гомотетия с центром O. В самом деле, пусть M—произвольная собственная точка конформной плоскости, M'—ее образ при инверсии I (с коэффициентом r^2 и центром O), а M''—образ M' при инверсии I_1 (с коэффициентом r_1^2 и тем же центром O). Тогда все точки M, M', M'' лежат на одном луче OM и при этом $OM \cdot OM' = r^2$, $OM' \cdot OM'' = r_1^2$, значит, $OM'' : OM = r_1^2 : r^2$. Однако гомотетия может быть изометрическим преобразованием только тогда, когда ее коэффициент равен $+1$, т. е. когда она представляет собой тождественное преобразование. Итак, $I_1 I = E$, откуда $I = I_1$. Теперь из равенства $\Omega I = \Omega_1 I_1$ следует: $\Omega = \Omega_1$.

Следствие 1. *Всякое круговое преобразование K отображает любую окружность взаимно однозначно также на окружность.*

В самом деле, этим свойством обладают преобразования подобия и инверсии.

Следствие 2. *Множество всех круговых преобразований плоскости образует группу.*

В самом деле: 1) произведение двух круговых преобразований есть круговое преобразование;

2) преобразование, обратное круговому преобразованию, есть снова круговое

Действительно, пусть K — произвольное круговое преобразование. Его по доказанному можно представить в виде $K = \Pi I$, где I — инверсия с центром O, а Π — подобие, оставляющее на месте точку O. Отсюда[1] $K^{-1} = I^{-1}\Pi^{-1} = I\Pi^{-1}$ — круговое преобразование, так как I и Π^{-1} — круговые преобразования.

Теорема 3. *Если при круговом преобразовании K три точки A, B, C остаются неподвижными, то K есть или тождественное преобразование, или инверсия относительно окружности, проходящей через эти три точки* (в частности, если точки A, B, C лежат на одной прямой, инверсия вырождается в симметрию относительно этой прямой).

Доказательство. Пусть A, B, C — три точки конформной плоскости, неподвижные при круговом преобразовании K. Если K — подобие, не меняющее ориентации, то оно должно быть тождественным, ибо две из трех точек A, B, C непременно собственные, а подобие, не меняющее ориентации и оставляющее на месте две собственные точки, есть тождественное преобразование.

Если K является инверсией, то кругом инверсии должен быть круг, проходящий через точки A, B, C (если точки A, B, C лежат на одной прямой, то этот круг вырождается в прямую ABC, а инверсия — в симметрию относительно этой прямой).

Если $K = \Omega I$, где I — инверсия с центром O, а Ω — изометрическое преобразование с неподвижной точкой O, то в силу неподвижности точек A, B, C эти точки должны лежать на круге инверсии (так как в противном случае $OA' \neq OA$, где A' — образ A при инверсии I и изометрическим преобразованием Ω точка A' не может быть совмещена с A), а так как I — инверсия, то Ω — тождественное преобразование. Итак, K и в этом случае есть

---

[1] Если A и B — любые преобразования плоскости R, то $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; в самом деле, $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(B(B^{-1}A^{-1})) = A((BB^{-1})A^{-1}) = A(EA^{-1}) = AA^{-1} = E$.

инверсия относительно окружности, проходящей через точки A, B, C. Наконец, K не может быть подобием, меняющим ориентацию (или изометрическим преобразованием второго рода), если точки A, B, C не лежат на на одной прямой. Если же точки A, B, C лежат на одной прямой, а K — подобие, меняющее ориентацию (или изометрическое преобразование второго рода) и оставляющее их на месте, то K есть симметрия относительно прямой, проходящей через эти точки.

Теорема 4. *Существует и притом только два круговых преобразования, которые переводят три любые точки A, B, C конформной плоскости соответственно в три любые точки A', B', C' той же конформной плоскости.*

Доказательство. Пусть I' — инверсия с центром A, I_2 — инверсия с центром A'. Пусть B_1 и C_1 — образы точек B и C при инверсии I_1, а B_1' и C_1' — образы точек B' и C' при инверсии I_2.

Пусть, наконец, $П$ — подобие, переводящее отрезок B_1C_1 в $B_1'C_1'$. Тогда круговое преобразование $K = I_2ПI_1$ переводит точки A, B, C соответственно в точки A', B', C'.

Пусть K_1 и K_2 — круговые преобразования, каждое из которых точки A, B, C переводит соответственно в точки A', B', C'. Тогда круговое преобразование $K_1^{-1}K_2$ точки A, B, C оставляет неподвижными, и, значит, либо $K_1^{-1}K_2 = E$, где E — тождественное преобразование, откуда $K_1 = K_2$, либо $K_1^{-1}K_2 = I$, где I — инверсия относительно окружности, проходящей через точки A, B, C или симметрия относительно прямой ABC, если точки A, B, C лежат на одной прямой. Из последнего соотношения следует, что

$$K_2 = K_1I.$$

Итак, если K_1 — круговое преобразование, которое точки A, B, C переводит соответственно в точки A', B', C', то всякое круговое преобразование K_2, переводящее точки A, B, C соответственно в точки A', B', C', либо совпадает с K_1, либо равно K_1I, где I — инверсия относительно окружности, проходящей через точки A, B, C, или симметрия относительно прямой ABC, если эти точки лежат на одной прямой.

Замечание. Инверсия в пространстве определяется аналогично. Евклидово пространство одной бесконечно удаленной точкой дополняется до конформного. При инверсии пространства образом сферы, не проходящей через полюс инверсии, является сфера, также не проходящая через полюс инверсии, а образом сферы, проходящей через центр инверсии, является плоскость, не проходящая через полюс инверсии. Инверсия есть конформное преобразование. Основная теорема — теорема 1 верна и для инверсии конформного пространства. Доказательство аналогично.

§ 5. Решение задач на построение одним циркулем

В настоящем параграфе мы будем считать, что прямая задана, если на плоскости фиксированы две различные точки, принадлежащие этой прямой. Окружность считается заданной, если задан ее центр и радиус или если заданы три точки, принадлежащие этой окружности. Окружность с центром O и радиусом OM будем обозначать так: (O, OM). Окружность, заданную тремя точками A, B, C, лежащими на ней, будем обозначать так: (ABC).

В настоящем параграфе мы рассмотрим решение ряда основных задач на построение одним циркулем. Большинство решений связано с использованием инверсии (O, r^2).

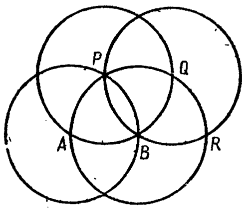
Опираясь в основном на эти построения, датскому математику XVII века Г. Мору удалось доказать, что при помощи одного циркуля можно осуществить все построения, которые осуществимы с помощью циркуля и линейки.

Доказательство этого положения было повторено в конце XVIII века итальянским математиком Маскерони. Поэтому построения, выполняемые при помощи одного циркуля, связывают часто с именем Маскерони (геометрия Маскерони, построения Маскерони и т. д.).

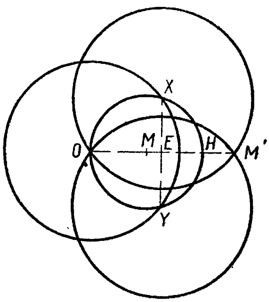
Задача 1. Отрезок AB задан своими граничными точками. Построить на продолжении отрезка AB за точку B такую точку C, что $AC = n \cdot AB$, где n — натуральное число.

Решение. Строим окружности (A, AB) и (B, BA).

Пусть P — одна из точек их пересечения. Строим окружность (P, PA), и пусть Q — вторая точка пересече-



Черт. 8.



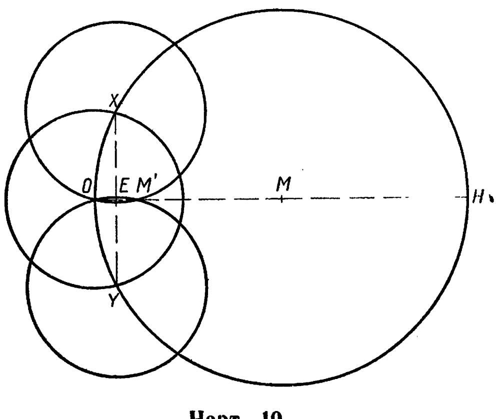
Черт. 9.

ния этой окружности с окружностью (B, BA). Строим окружность (Q, QB), и пусть R — вторая точка пересечения этой окружности с окружностью (B, BA). Точка R лежит на продолжении отрезка AB за точку B, причем $AB = BR$ (черт. 8).

В самом деле, указанное построение дает вершину R правильного шестиугольника, противолежащую его вершине A и вписанного в окружность (B, BA). Продолжая аналогичные построения, можно построить точку C, лежащую на продолжении отрезка AB за точку B, и такую, что $AC = n \cdot AB$, где n — любое натуральное число.

Задача 2. Построить одним циркулем образ M' точки M при инверсии (O, r^2).

Решение. 1°. $OM > \frac{r}{2}$. Если точка M лежит на круге инверсии, то ее образ M' совпадает с точкой M, поэтому предполагаем, что точка M лежит либо внутри круга инверсии (черт. 9), либо вне его (черт. 10).



Черт. 10.

В обоих случаях строим окружность (M, MO). Пусть X и Y — точки пересечения этой окружности с окружностью инверсии. Строим окружности (X; XO) и (Y; YO); вторая точка пересечения этих окружностей есть точка M'. В самом деле, так как точки X и Y симметричны относительно прямой MO, а окружности (X, XO), (Y, YO) равны друг другу, то вторая точка M' их пересечения лежит на луче OM. Далее, если H — точка, диаметрально противоположная точке O на окружности (M, MO), а E — точка пересечения XY и OM (E — середина отрезка OM'; ни точку H, ни точку E строить не нужно, они вводятся для доказательства), то

$$r^2 = OX^2 = OH \cdot OE = OM \cdot OM'.$$

2°. $OM < \frac{r}{2}$. В этом случае окружность (M, MO) не пересечет окружность инверсии. Строим на луче OM точку N такую, что $n \cdot OM = ON$ и что $ON > \frac{r}{2}$. Строим точку N', полученную инверсией (O, r^2), из точки N случай 1° и затем строим на луче ON' точку M' такую, что $OM' = n \cdot ON'$. Тогда

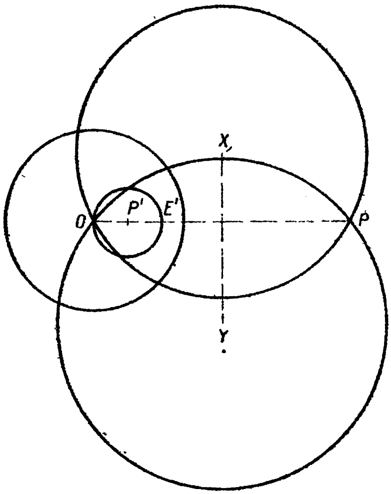
$$OM \cdot OM' = \frac{ON}{n} \cdot n \cdot ON' = ON \cdot ON' = r^2.$$

Из решения этой задачи вытекает возможность построить одним циркулем точку C, лежащую на отрезке AB, и такую, что $n \cdot AC = AB$. В самом деле, построим на продолжении отрезка AB за точку B точку C' такую, что $AC' = n \cdot AB$ (задача 1). Пусть C — образ точки C' при инверсии (A, AB^2) (задача 2). Точка C искомая. В самом деле,

$$AC \cdot AC' = AB^2; \quad AC \cdot n \cdot AB = AB^2, \quad AC \cdot n = AB.$$

Задача 3. Построить одним циркулем окружность C', являющуюся образом при инверсии (O, r^2) прямой C, не проходящей через полюс O этой инверсии. Прямая предполагается заданной двумя различными точками X и Y, лежащими на ней.

Решение. Окружность C' проходит через точку O. Пусть P — вторая точка пересечения окружностей (X; XO) и (Y; YO). Точка P симметрична точке O относительно прямой XY. Строим (одним циркулем) образ P' точки M при инверсии (O, r^2). Искомая окружность C' есть окружность $(P', P'O)$ (черт. 11). В самом деле, если E — точка пересечения XY и OP (E — середина OP), а E' — точка, диаметрально противоположная точке O на окружности $(P', P'O)$, то



Черт. 11.

$$r^2 = OP \cdot OP' = OE \cdot OE'.$$

Задача 4. Построить одним циркулем точку пересечения двух прямых, одна из которых задана точками A и B, а другая — точками C и D.

Решение. Построим на плоскости произвольную окружность S. Построим (одним циркулем) окружности K_1 и K_2, являющиеся образами данных прямых при инверсии относительно окружности S. Пусть M' — точка пересечения окружностей K_1 и K_2. Построим (одним циркулем) образ M точки M' при инверсии относительно окружности S. Точка M и есть точка пересечения данных прямых.

Задача 5. Построить одним циркулем центр окружности, заданной тремя точками A, B, C, лежащими на этой окружности (сама окружность не проведена).

Решение. Пусть P и Q — точки пересечения окружностей (A, AB) и (B, BA). Прямая PQ — медиатриса отрезка AB.

Пусть L и M — точки пересечения окружностей (B, BC) и (C, CB). Прямая LM — медиатриса отрезка BC. Центр O окружности (ABC) есть точка пересечения прямых PQ и LM (задача 4).

Задача 6. На прямой, заданной двумя точками A и B от точки B, отложить отрезки BC_1 и BC_2, равные данному отрезку PQ.

Решение. Построим окружность (B, PQ). Вопрос сводится к отысканию точек пересечения этой окружности с прямой AB. Построим (одним циркулем) образы K_1 и K_2 прямой AB и окружности (B, PQ) при инверсии относительно произвольной окружности[1]. Пусть C_1' и C_2' — точки пересечения окружностей K_1 и K_2.

Образы C_1 и C_2 точек C_1' и C_2' при рассматриваемой инверсии и есть искомые точки.

Задача 7. К трем данным отрезкам PQ, MN, RS построить четвертый пропорциональный, т. е. такой, что

$$PQ \cdot MN = RS \cdot XY.$$

Решение. 1°. $PQ \neq MN$. Построим окружности (O, PQ) и (O, MN), где O — произвольная точка плоскости. Выберем на окружности (O, PQ) произвольную точку A и построим (одним циркулем) точку B, в которой прямая OA пересекает окружность (O, MN) (возьмем ту точку B, которая лежит на луче OA). Построим окружность (O, RS) и возьмем на ней произвольную точку C. Построим окружность (ABC) (задача 5). Пусть D — вторая точка пересечения этой окружности с прямой OC (она строится одним циркулем).

Тогда

$$OA \cdot OB = OC \cdot OD$$

или

$$PQ \cdot MN = RS \cdot OD;$$

OD — искомый отрезок.

2°. $PQ = MN$.

В этом случае рассмотрим отрезки PQ и $2 \cdot MN$ (отрезок $2 \cdot MN$ строится одним циркулем). Построим (одним циркулем) отрезок X_1Y_1 такой, что

$$PQ \cdot 2MN = R_1S \cdot X_1Y_1 \text{ (случай 1°)}.$$

Искомый отрезок $XY = \frac{X_1Y_1}{2}$ строится одним циркулем (см. замечание в конце решения задачи 2).

Задача 8. На плоскости даны две точки A и B. Построить (одним циркулем) какую-нибудь точку C такую, что угол ABC равен 90°.

Решение. На прямой AB строим (одним циркулем) отрезок $BD = AB$. Пусть C — любая из точек пересечения окружностей (A, AD) и (D, DA). Точка C искомая.

Задача 9. Дан отрезок AB точками A и B.

[1] Для построения образа окружности (B, PQ) достаточно построить образы трех ее точек и воспользоваться построением, указанным в задаче 5.

Пусть n — произвольное натуральное число, не являющееся квадратом натурального числа. Построить отрезок $AB\sqrt{n}$.

Решение. Построим (одним циркулем) точку C такую, что $\angle ABC = 90°$. Найдем точку P пересечения BC с окружностью (B, BA). Тогда $AP = AB\sqrt{2}$. Далее построим (одним циркулем) точку D такую, что $\angle APD = 90°$, и построим точку Q пересечения прямой PD с окружностью (P, AB). Тогда $PQ = AB\cdot\sqrt{3}$ и т. д.

Из результатов этой задачи следует, что на окружности (заданной тремя своими точками) одним циркулем можно построить вершины правильного треугольника, квадрата, правильных пятиугольника и шестиугольника.

§ 6. Примеры и задачи

Пример 1. Пусть A' и B' — образы точек A и B при инверсии (O, k). Выразить длину отрезка $A'B'$ через длины отрезков AB, OA, OB и через k. Предполагается, что точки A и B отличны от точки O.

Решение. Предположим, что точки O, A и B не принадлежат одной прямой. Пусть $k > 0$. Тогда точки A' и B' лежат соответственно на лучах OA и OB, причем

$$OA\cdot OA' = OB\cdot OB' = k.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{OA'}{OB} = \frac{OB'}{OA}$$

и, значит, треугольники OAB и $OA'B'$ подобны. Из подобия этих треугольников следует, что

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OB} = \frac{OA'\cdot OA}{OB\cdot OA} = \frac{k}{OA\cdot OB}$$

и, следовательно,

$$A'B' = k\cdot\frac{AB}{OA\cdot OB}.$$

Читателю предлагается проверить, что эта формула верна и в том случае, если точки O, A и B лежат на одной прямой (точки A и B отличны от точки O).

Пример 2. Доказать, что вокруг выпуклого четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность тогда и только тогда, когда произведение диагоналей этого четырехугольника равно сумме произведений противоположных его сторон (теорема Птолемея):

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD. \qquad (1)$$

I. Предположим, что вокруг четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность K, и докажем, что тогда выполняется соотношение (1).

Рассмотрим инверсию $(A, 1)$. При этой инверсии окружность K перейдет в прямую K', а точки B, C и D перейдут в точки B', C', D', лежащие на этой прямой; точка C' будет лежать между точками B' и D', а потому

$$B'C' + C'D' = B'D' \qquad (2)$$

или на основании предыдущего примера

$$\frac{BC}{AB \cdot AC} + \frac{CD}{AC \cdot AD} = \frac{BD}{AB \cdot AD}. \qquad (3)$$

Отсюда следует соотношение (1).

II. Предположим, что соотношение (1) выполнено. Докажем, что тогда четырехугольник $ABCD$ выпуклый и вокруг него можно описать окружность.

Рассмотрим инверсию $(A, 1)$. Пусть B', C', D'—образы точек B, C и D при этой инверсии. Из соотношения (1) следует соотношение (3), а из соотношения (3) и результата примера 2 следует соотношение (2). Значит, точки B', C' и D' лежат на одной прямой K', причем точка C' лежит между точками B' и D'. Отсюда следует, что точки B, C и D лежат на одной окружности, проходящей через точку A, являющуюся образом прямой K' при инверсии $(A, 1)$. Так как луч AC лежит внутри угла, образованного лучами AB и AD, то AC—диагональ четырехугольника $ABCD$, а, значит, этот четырехугольник при указанном порядке его вершин выпуклый.

Пример 3. В окружность K вписан равносторонний треугольник ABC. Пусть O—точка, не лежащая на окружности K. Доказать, что существует треугольник со сторонами OA, OB и OC. Доказать, что если точка O лежит на окружности K, то сумма двух из отрезков OA, OB, OC равна третьему.

Доказательство. Пусть точка O не лежит на окружности K. Рассмотрим инверсию $(O, 1)$. Окружность K перейдет в окружность K', а точки A, B, C перейдут в точки A', B', C', лежащие на окружности K' и, следовательно, не лежащие на одной прямой. На основании примера 1 имеем:

$$B'C' = \frac{BC}{OB \cdot OC} = \frac{OA \cdot BC}{OA \cdot OB \cdot OC};$$

$$C'A' = \frac{OB \cdot CA}{OA \cdot OB \cdot OC};$$

$$A'B' = \frac{OC \cdot AB}{OA \cdot OB \cdot OC}$$

и, значит,

$$B'C' : C'A' : A'B' = OA : OB : OC, \tag{1}$$

так как $BC = CA = AB$. Таким образом, отрезки OA, OB, OC пропорциональны сторонам $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ треугольника $A'B'C'$ и, значит, существует треугольник со сторонами OA, OB, OC (этот треугольник подобен треугольнику $A'B'C'$).

Пусть точка O лежит на окружности K, например на дуге $\overset{\frown}{BC}$, не содержащей A. При инверсии $(0, 1)$ окружность K перейдет в прямую K', точки A, B, C перейдут в точки A', B', C', лежащие на прямой K', причем точка A' будет лежать между точками B' и C'. Значит,

$$A'B' + A'C' = B'C',$$

и так как соотношения (1) имеют место и в этом случае, то

$$OA = OB + OC.$$

Замечание. Теорема верна, если точку O выбрать как угодно в пространстве. Доказательство аналогично.

Пример 4. Две окружности C_1 и C_2 с центрами O_1 и O_2 касаются друг друга внешним образом. Прямая l касается обеих этих окружностей соответственно в различных точках A и B. Построить окружность, касающуюся двух данных и прямой l.

Решение. Рассмотрим инверсию (A, AB^2). При этой инверсии окружность C_2 перейдет в себя, так как если через точку A провести произвольную прямую, пересекающую окружность C_2 в точках M и M', то $AM \cdot AM' = AB^2$. Окружность C_1 перейдет в прямую C_1', параллельную прямой l и касающейся окружности C_2. Таким образом, вопрос сводится к построению окружности, касающейся окружности C_2 и двух параллельных к ней касательных l и C_1'. Таких окружностей две, и построение их не вызывает затруднений. Пусть K_1' — одна из этих окружностей, A_1' — точка прикосновения окружностей K_1' и C_2, а B_1 — точка прикосновения K_1' к прямой C_1'. Пусть A_1 — вторая точка пересечения прямой AA_1' с окружностью C_2; точка A_1 является образом точки A_1' при инверсии (A_1AB^2). Пусть B_1 — точка пересечения прямой AB_1' с окружностью C_1 (точка B_1 отлична от точки A); точка B_1 является образом точки B_1' при рассматриваемой инверсии. Точки A_1 и B_1 являются точками прикосновения искомой окружности соответственно с окружностями C_2 и C_1. Центр P_1 одной из искомых окружностей является точкой пересечения прямых O_2A_1 и O_1B_1, а радиус равен $PA_1 = PB_1$. Аналогично строится и вторая окружность. Задача имеет два решения.

Пример 5. Две окружности C_1 и C_2 пересекаются в точках A и B. На прямой AB взята точка C, отличная от точек A и B. Построить окружность, проходящую через точку C и касающуюся окружностей C_1 и C_2.

Решение. Рассмотрим инверсию (C, σ), где $\sigma = CA \cdot CB$. При этой инверсии каждая из окружностей C_1 и C_2 перейдет в себя, а искомая окружность перейдет в прямую, касающуюся окружностей C_1 и C_2. Так как две пересекающиеся окружности C_1 и C_2 имеют две общие касательные K_1' и K_2', то задача имеет два решения. Пусть A_1' и B_1' — точки прикосновения прямой K_1' с окружностями C_1 и C_2. Обозначим через A_1 вторую точку пересечения прямой CA_1' с окружностью C_1, а через B_1 вторую точку пересечения прямой CB_1' с окружностью C_2. Одна из искомых окружностей K_1 проходит через точки C, A_1 и B_1. Аналогично строится вторая окружность.

Задача имеет два решения.

Пример 6. В треугольнике ABC дан радиус r вписанной и радиус R описанной окружности. Найти расстояние между их центрами.

Решение. Если при инверсии $I(0, k)$ окружность C переходит в окружность C', то окружность C переходит в окружность C' и при гомотетии $\Gamma\left(0, \frac{k}{\sigma}\right)$, где σ — степень точки O относительно окружности C.

Рассмотрим инверсию (P, r^2), где P — центр окружности, вписанной в данный треугольник. При этой инверсии точки вписанной окружности неподвижны (иначе — вписанная окружность является окружностью инверсии).

Вершины данного треугольника при инверсии (P, r^2) перейдут в середины сторон треугольника, вершинами которого служат точки прикосновения к сторонам треугольника окружности, вписанной в этот треугольник (см. начало § 3 — построение образа M' точки M. при инверсии). Радиус окружности, проходящей через середины сторон указанного треугольника, равен $\frac{r}{2}$. Таким образом, окружность, описанная вокруг треугольника ABC, радиус которой равен R, перейдет при инверсии (P, r^2) в окружность радиуса $\frac{r}{2}$. На основании следствия 2 к теореме 1, § 3, имеем:

$$\frac{\frac{r}{2}}{R}=\frac{r^2}{|d^2-R^2|}=\frac{r^2}{R^2-d^2},$$

откуда

$$d^2=R^2-2Rr.$$

Пример 7. N и S — две диаметрально противоположные точки окружности C; l — прямая, касающаяся окружности C в точке S. Из произвольной точки O, лежащей вне окружности C, но не лежащей на касательной к окружности C в точке N к окружности C, проведены касательные OA и OB (A и B — точки касания). Пусть O', A' и B' — проекции из точки N на прямую l точек O, A и B. Доказать, что O' — середина отрезка $A'B'$.

Доказательство. При инверсии (N, NS^2) окружность C перейдет в прямую l, а окружность K с центром O и радиусом $OA=OB$, которая ортогональна окружности C, перейдет в окружность K', ортогональную прямой l; значит, центр окружности K' лежит на прямой l; с другой стороны, центр окружности K' лежит и на прямой NO, а потому центром окружности K' является проекция O' точки O из точки N на прямую l. Проекции A' и B' точек A и B из точки N на прямую l есть образы точек A и B при инверсии (N, NS^2); с другой стороны, точки A' и B' лежат и на окружности K', значит, $A'B'$ — диаметр окружности K', а O' — центр K', поэтому $A'O'=O'B'$.

Замечание. Эта задача обобщается на случай пространства: пусть N и S — две диаметрально противоположные точки сферы C, а l — плоскость, касательная к сфере C в точке S. Тогда проекция из точки N на плоскость l любой окружности K, лежащей на сфере C

и не проходящей через точку N, есть снова окружность C', центром которой является проекция из точки N на плоскость l вершины конуса, касающегося сферы C по окружности K. Указанный вид проектирования сферы на плоскость называется стереографической проекцией. Стереографическая проекция применяется при построении карт. Так как она сводится к инверсии (т. е. если M и M' — соответственно точки пересечения луча, выходящего из N со сферой C и с плоскостью l, то $NM \cdot NM' = NS^2$), а при инверсии сохраняются углы между линиями, то стереографическая проекция дает конформное отображение сферы на плоскость. Обычно сферу делят на две части большим кругом, параллельным плоскости l, и полусферу, содержащую точку S, проектируют из точки N на плоскость l, а полусферу, содержащую точку N, проектируют из точки S на плоскость m, касательную к сфере C в точке N. Получается карта сферы, состоящая из двух одинаковых кругов.

Заметим, что отобразить сферу на плоскость так, чтобы сохранились и углы и длины линий на сфере, невозможно. Доказательство этого предложения дается в курсах дифференциальной геометрии.

Пример 8[1]. На плоскости R фиксированы две различные точки O_1 и O_2. Фиксировано число k. Выбран масштабный отрезок m.

Найти геометрическое место точек M плоскости R, для каждой из которых разность квадратов расстояний до точек O_1 и O_2 равна k:

$$O_1M^2 - O_2M^2 = k.$$

Решение. Заметим, что если точка M принадлежит заданному геометрическому месту, то ему принадлежит и прямоугольная проекция P точки M на прямую O_1O_2.

В самом деле,

$$O_1M^2 = O_1P^2 + PM^2;$$
$$O_2M^2 = O_2P^2 + PM^2,$$

откуда

$$O_1P^2 - O_2P^2 = O_1M^2 - O_2M^2 = k.$$

---

[1] Этот пример связан с двумя следующими (см. ниже примеры 9 и 10). В примере 10 дается преобразование инверсий двух непересекающихся окружностей в две концентрические.

Отсюда следует, что если на прямой O_1O_2 имеется точка P, принадлежащая заданному геометрическому месту, то заданному геометрическому месту принадлежат все точки прямой, проходящей через точку P перпендикулярно прямой O_1O_2.

Докажем, что на прямой O_1O_2 существует и притом только одна точка P, для которой

$$O_1P^2 - O_2P^2 = k.$$

Доказательство проведем только для случая $k > 0$ (рассмотрение случаев $k < 0$ и $k = 0$ предоставляется читателю).

Предположим, что на прямой O_1O_2 существует точка P, для которой

$$O_1P^2 - O_2P^2 = k. \tag{1}$$

Так как $k > 0$, то $O_1P > O_2P$, а, значит, точка P лежит на луче $\overrightarrow{OO_2}$, где O — середина отрезка O_1O_2.

Из соотношения (1) находим.

$$(O_1O + OP)^2 - |OP - OO_2|^2 = O_1O^2 + 2\cdot O_1O\cdot OP + OP^2 - \\ - OP^2 + 2\cdot OP\cdot OO_2 - OO_2^2 = 2\cdot OP\cdot(OO_1 + OO_2) = \\ = 2\cdot OP\cdot O_1O_2 = k$$

и, значит,

$$OP = \frac{k}{2\cdot O_1O_2}, \tag{2}$$

и так как точка P лежит на луче $\overrightarrow{OO_2}$, то ее положение однозначно определено этим соотношением.

Этими рассуждениями доказано, что если на прямой O_1O_2 существует точка P, для которой выполнено соотношение (1), то такая точка только одна (единственность). Но так как из соотношения (2) следует соотношение (1) (выкладки, которые мы проводили, являлись эквивалентными преобразованиями), то точка P, определяемая равенством (2), удовлетворяет соотношению (1).

Таким образом, заданное геометрическое место есть прямая, проходящая через точку P перпендикулярно прямой O_1O_2.

П р и м е р 9. Даны две неконцентрические окружности C_1 и C_2, центры которых соответственно O_1 и O_2, а радиусы r_1 и r_2. Найти геометрическое место точек M, для каждой из которых степени относительно окружностей

C_1 и C_2 равны между собой. Это геометрическое место называется радикальной осью окружностей C_1 и C_2.

Степенью точки O относительно окружности C радиуса r называется число

$$\sigma = d^2 - r^2,$$

где d — расстояние от точки O до центра S окружности C. Проведем через точку O прямую l, пересекающую окружность C в точках A и B (точки A и B могут и совпадать; в этом случае прямая l — касательная к окружности в точке A). Введем на прямой l положительное направление. Примем отрезок, которым измерялось расстояние от точки O до центра окружности C, за масштабный, а точку O примем за начало координат на прямой l. Пусть $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ — координаты точек на оси l. Произведение $\overline{OA}\cdot\overline{OB}$ не зависит ни от выбора секущей, которую мы проводили через точку O, ни от выбора на ней положительного направления. В частности, произведение $\overline{OA}\cdot\overline{OB}$ равно произведению $\overline{OP}\cdot\overline{OQ}$, где P и Q — точки пересечения с окружностью C секущей OS, проходящей через центр S окружности C. По теореме Шаля[1]

$$\overline{OP}\cdot\overline{OQ} = (\overline{OS} + \overline{SP})(\overline{OS} + \overline{SQ}).$$

Так как S — середина отрезка PQ, то $\overline{SQ} = -\overline{SP}$ и, значит,

$$\overline{OP}\cdot\overline{OQ} = (\overline{OS} + \overline{SP})(\overline{OS} - \overline{SP}) = \overline{OS}^2 - \overline{SP}^2 = \overline{d}^2 - \overline{r}^2.$$

Таким образом, степень σ точки O относительно окружности C можно определить как произведение координат точек A и B, в которых окружность C пересекает любую ось координат с началом в точке O: $\sigma = \overline{OA}\cdot\overline{OB}$.

---

[1] Для трех любых точек P, Q, R, лежащих на оси, имеет место соотношение

$$\overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{PR},$$

где $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{PR}$ — соответственно координаты направленных отрезков $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{PR}$ (теорема Шаля).

Координатой $\overline{PQ}$ направленного отрезка $\overrightarrow{PQ}$, лежащего на оси, называется число, модуль которого равен длине отрезка PQ и которое положительно, если $\overrightarrow{PQ}$ и ось имеют одинаковое направление, и отрицательно, если противоположное (если точки P и Q совпадают, то по определению $\overline{PQ} = 0$).

В частности, если точка O лежит вне окружности, а точки A и B совпадают (ось касается окружности), то

$$\sigma = \overline{OA}^2 = OA^2,$$

т. е. степень точки O, лежащей вне окружности C относительно этой окружности, равна квадрату длины отрезка OA касательной (A — точка касания), проведенной из точки O к окружности C.

В рассматриваемом случае $\sigma > 0$.

Если точка O лежит на окружности C, то ее степень относительно окружности C равна нулю, а если точка O лежит внутри окружности C, то ее степень относительно окружности C отрицательна.

Мы допускаем, что одна из окружностей C_1 и C_2 или и C_1 и C_2 вырождается в точку (нуль-окружность). Степень точки O относительно нуль-окружности C считаем равной $\sigma = OC^2$. Центром нуль-окружности C считаем саму эту точку C. Радиус нуль-окружности считаем равным нулю.

Перейдем к решению данной задачи. Обозначим степени точки M относительно окружностей C_1 и C_2 соответственно через σ_1 и σ_2:

$$\sigma_1 = MO_1^2 - r_1^2;$$
$$\sigma_2 = MO_2^2 - r_2^2.$$

Точка M принадлежит заданному геометрическому месту только тогда, когда $\sigma_1 = \sigma_2$, т. е.

$$MO_1^2 - r_1^2 = MO_2^2 - r_2^2$$

или

$$MO_1^2 - MO_2^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

На основании предыдущего примера искомым геометрическим местом является некоторая прямая, перпендикулярная O_1O_2.

Если окружность C_1 лежит вне окружности C_2, то для построения радикальной оси можно взять любую общую касательную к окружностям C_1 и C_2. Пусть T_1 и T_2 — точки прикосновения этой касательной к окружностям C_1 и C_2, а T — середина отрезка T_1T_2. Точка T лежит на радикальной оси окружностей C_1 и C_2, так как степени точки T относительно окружностей C_1 и C_2 равны между собой ($TT_1^2 = TT_2^2$). Отсюда следует, что радикальной осью окружностей C_1 и C_2 является прямая, проходящая через точку T перпендикулярно к прямой O_1O_2.

В рассматриваемом случае радикальная ось не пересекает ни одну из окружностей C_1 и C_2, так как если бы она пересекала, например, окружность C_1 в точке M, то степень точки M относительно окружности C_1 была бы равна нулю, в то время как степень той же точки M относительно окружности C_2 не равна нулю. Так как при этом точки T_1 и T_2, лежащие соответственно на окружностях C_1 и C_2, лежат по разные стороны от их радикальной оси (проходящей через середину T отрезка T_1T_2), то окружности C_1 и C_2 лежат по разные стороны от их радикальной оси.

Вопросы

1°. Как построить радикальную ось двух пересекающихся окружностей?

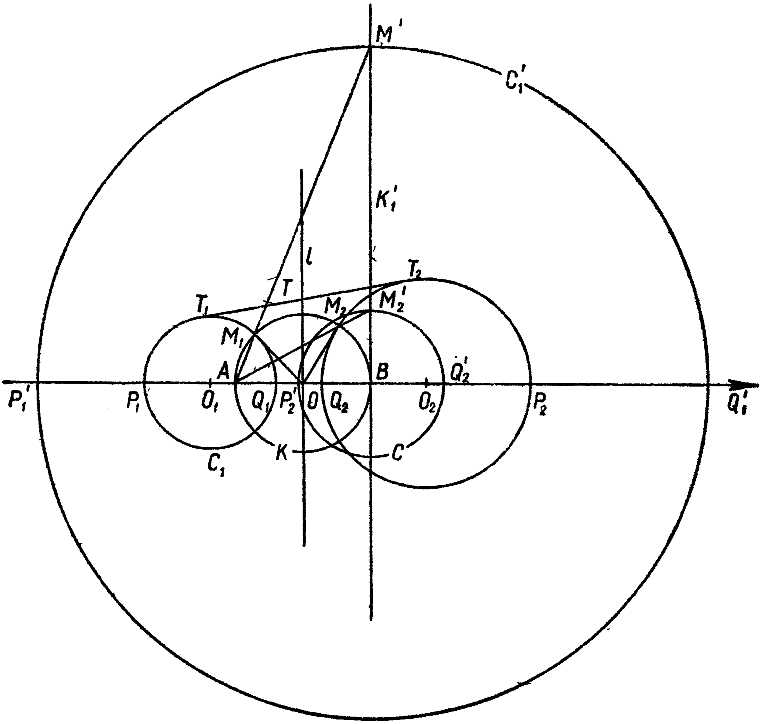
2°. Как построить радикальную ось окружностей в случае, если одна из них находится внутри другой? Доказать, что в этом случае окружности лежат по одну сторону от их радикальной оси.

Пример 10. Доказать, что если окружности C_1 и C_2 не имеют ни одной общей точки, то существует инверсия, которая переводит их в две концентрические окружности C_1' и C_2'. Исследовать, в какие области при этой инверсии переходят те части плоскости, на которые она делится окружностями C_1 и C_2.

Доказательство. Рассмотрим только тот случай, когда окружность C_1 лежит вне окружности C_2. Построим их радикальную ось l (черт. 12). Пусть O — точка, в которой радикальная ось пересекает прямую O_1O_2, проходящую через центры окружностей C_1 и C_2. Выберем на прямой O_1O_2 положительное направление от O_1 к O_2. Обозначим через P_1Q_1 и P_2Q_2 диаметры окружностей C_1 и C_2, лежащие на оси $\overrightarrow{O_1O_2}$, причем пусть направление диаметра P_1Q_1 от P_1 к Q_1 совпадает с положительным направлением оси $\overrightarrow{O_1O_2}$, а направление диаметра P_2Q_2 от P_2 к Q_2 противоположно направлению оси $\overrightarrow{O_1O_2}$. Так как окружности C_1 и C_2 лежат по разные стороны от их радикальной оси l, то точка O лежит между точками Q_1 и Q_2. Точка O лежит на радикальной оси l окружностей C_1 и C_2 и вне каждой из них; поэтому отрезки касательных OM_1 и OM_2, проведенных из точки O к окружностям C_1 и C_2 (M_1 и M_2 точки касания), равны между собой:

$OM_1 = OM_2$ (OM_1^2 — степень точки O относительно окружности C_1, а OM_2^2 — степень точки O относительно окружности C_2).

Построим окружность K с центром O и радиусом $OM_1 = OM_2$. Пусть A и B — точки пересечения этой окружности с прямой O_1O_2 (через A обозначим ту точку,



Черт. 12.

которая лежит внутри окружности C_1, а через B — ту, которая лежит внутри окружности C_2).

Рассмотрим инверсию $I = (A, AB^2)$. Так как окружность K проходит через центр инверсии и через точку B, то ее образом K' при инверсии I будет прямая K', проходящая через точку B перпендикулярно прямой O_1O_2. Так как окружность K пересекает ортогонально окружности C_1 и C_2, то прямая K' будет пересекать ортогонально образы C'_1 и C'_2 этих окружностей, а, значит, прямая K' будет проходить через центры окружностей C'_1 и C'_2. С другой стороны, центры окружностей C'_1 и C'_2 должны остаться на прямой O_1O_2, поэтому центры окружностей C'_1 и C'_2 совпадут с точкой B, а, значит окружности C'_1 и C'_2 концентричны.

Для построения окружностей C'_1 и C'_2 находим точки M'_1 и M'_2 пересечения прямых AM_1 и AM_2 с прямой K'; M'_1 и M'_2 — образы точек M_1 и M_2 при инверсии I.

Окружность C'_2 — это окружность с центром B и радиусом BM'_2; окружность C'_1 — это окружность с центром B и радиусом BM'_1. Окружность C'_2 лежит внутри окружности C'_1.

В самом деле, так как точки Q_1 и Q_2 лежат на луче $\overrightarrow{AB}$ и $AQ_1 < AQ_2 < AB$, то точки Q'_1 и Q'_2 лежат также на луче $\overrightarrow{AB}$ и $AQ'_1 > AQ'_2 > AB$, значит, $BQ'_1 > BQ'_2$.

Окружности C'_1 и C'_2 делят плоскость на три области. Обозначим через I область, образуемую всеми точками, лежащими внутри окружности C'_2; через II обозначим область, образованную всеми точками, лежащими вне окружности C'_2 и внутри окружности C'_1 (кольцо), и через III обозначим область, образованную всеми точками, лежащими вне окружности C'_1.

1°. Возьмем произвольную точку M', лежащую в области I. Тогда окружность L' с центром B и радиусом BM' пересечет отрезок BQ'_2 во внутренней точке N' этого отрезка. Так как точка N' лежит на луче $\overrightarrow{AB}$ и $AB < AN' < AQ'_2$, то $AB > AN > AQ_2$, где N — образ точки N' при инверсии I. Таким образом, точка N лежит внутри отрезка Q_2B, значит, и внутри окружности C_2. Так как окружности L' и C'_2 не пересекаются и точка N' окружности L' отображается внутрь образа C_2 окружности C'_2 при инверсии I, то и вся окружность L', а значит, и точка M' отображается внутрь окружности C_2.

2°. Пусть точка M' лежит в области II. Тогда окружность L' с центром B и радиусом BM' пересечет отрэзок $Q'_2Q'_1$ в точке N', являющейся внутренней точкой этого отрезка:

$$AB < AQ'_2 < AN' < AQ'_1.$$

Значит,

$$AB > AQ_2 > AN > AQ_1,$$

следовательно, точка N (образ N' при инверсии I) лежит внутри отрезка Q_1Q_2, т. е. и вне окружности C_1 и вне окружности C_2. Отсюда следует, что образ L окружности L' при инверсии I лежит и вне окружности C_1 и вне окружности C_2, а, значит, образ M точки M' также лежит и вне окружности C_1 и вне окружности C_2.

3°. Пусть точка M' лежит в области III. Тогда окружность L' с центром B и радиусом BM' пересечет луч AB в точке N' такой, что

$$AQ_1' < AN'$$

и, значит,

$$AQ_1 > AN,$$

где N — образ точки N' при инверсии I. Так как точка N лежит также на луче $\overrightarrow{AB}$ и $AN < AQ_1$, то точка N лежит внутри окружности C_1. Образ L окружности L' и образ M точки M' при инверсии I также лежат внутри окружности C_1.

Верны и обратные положения: образ M' (при инверсии I) любой точки M, лежащей внутри окружности C_2, лежит внутри окружности C_2'. Образ M' (при инверсии I) любой точки M, лежащей вне окружностей C_1 и C_2, лежит внутри кольца, образованного окружностями C_1' и C_2', и, наконец, образ M' (при инверсии I) любой точки M, лежащей внутри окружности C_1, лежит вне окружности C_1'. Можно применить метод доказательства от противного и использовать то, что инверсия есть инволюционное преобразование ($I^2 = E$), т. е. если M' есть образ точки M при инверсии I, то M есть образ M' при той же инверсии.

Пример 11. Построить окружность, касающуюся трех данных окружностей C_1, C_2, C_3 (задача Апполония).

Решение. Рассмотрим только тот случай, когда каждая из окружностей C_1, C_2, C_3 лежит вне двух других. Произведем инверсию I, при которой окружности C_1 и C_2 перейдут в две концентрические окружности C_1' и C_2' (см. предыдущий пример). Так как окружность C_3 лежит вне окружностей C_1 и C_2, то она при инверсии I перейдет в окружность C_3', лежащую внутри кольца, образованного окружностями C_1' и C_2'. Пусть r_1' и r_2' — радиусы окружностей C_1' и C_2'. Предположим, что $r_1' > r_2'$.

Все окружности, касающиеся окружностей C_1' и C_2', можно разбить на два множества: окружности радиуса

$\frac{r'_1 - r'_2}{2}$ и окружности радиуса $\frac{r'_1 + r'_2}{2}$. Среди окружностей первого множества существуют четыре, которые касаются окружности C'_3 (две из них касаются окружности внешне, две другие внутренне). Построение этих четырех окружностей K'_i $(i=1, 2, 3, 4)$ не представляет затруднений. Существуют четыре окружности S'_i $(i=1, 2, 3, 4)$ из второго множества, касающиеся окружности C'_3. Построение окружностей S'_i также просто. Образы K_i и S_i окружностей K'_i и S'_i являются всеми теми окружностями, которые касаются данных окружностей C_1, C_2, C_3. Задача имеет в рассматриваемом случае восемь решений.

Задачи для самостоятельного решения

1. Какое преобразование является произведением двух инверсий I_1 и I_2 с общим полюсом O?

Ответ. Гомотетия.

2. Пусть A', B', C' — точки, симметричные вершинам A, B, C треугольника ABC относительно произвольной точки плоскости. Доказать, что окружности $(AB'C')$, $(BC'A')$, $(CA'B')$ пересекаются в точке, лежащей на окружности (ABC), а окружности $(A'BC)$, $(B'CA)$ и $(C'AB)$ пересекаются в точке, лежащей на окружности $(A'B'C')$.

3. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A', B' и C'. Пусть A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 — образы точек A, B, C при гомотетиях с одним и тем же коэффициентом k и соответственно с центрами гомотетий в точках C', A', B' и B', C', A'. Доказать, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ имеют один и тот же центр тяжести.

4. Пусть r' — радиус окружности вневписанной в угол A треугольника ABC, a — длина стороны BC. При каком соотношении между a и r' окружность с диаметром BC касается окружности S, вписанной в треугольник ABC?

Ответ. $a = r'$.

Указание. Рассмотреть инверсию (B, BA'^2), где A' — точка прикосновения окружности S к стороне BC.

5. Доказать, что окружность Эйлера для треугольника ABC (см. пример на стр. 101) касается окружности, вписанной, и окружностей, вневписанных в этот треугольник.

Указание. Пусть P и Q — точки прикосновения окружности, вписанной и вневписанной в угол A треугольника ABC со стороной BC. Пусть O — середина стороны BC. Тогда $OP = OQ$. Рассматриваемые две окружности касаются трех сторон треугольника ABC. При инверсии (O, OP^2) окружность Эйлера перейдет в их общую четвертую касательную (отличную от сторон треугольника ABC).

6. Дана прямая D и точки F и H, имеющие одну и ту же проекцию на D и расположенные по одну сторону от D. Пусть O — какая-нибудь точка, лежащая на прямой D. Построить окружность, проходящую через точку F и касающуюся в точке H прямой OH.

7. Построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности.

8. Построить окружность, касающуюся данной прямой в данной точке и касающуюся другой данной окружности.

9. Пусть S — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, r — радиус этой окружности и D, E, F — точки прикосновения ее к сторонам BC, CA и AB.

1°. Рассмотрим инверсию (S, r^2). Пусть A', B', C' — образы точек A, B, C при этой инверсии. Пусть (α), (β) и (γ) — окружности, в которые инвертируются прямые BC, CA и AB. Найти радиусы этих окружностей и углы, под которыми они пересекаются (углы A, B, C треугольника и r даны).

2°. Доказать, что точки F, A', E лежат на одной прямой (аналогично F, B', D и D, C', E). Вычислить углы, стороны и радиус окружности $(A'B'C')$, зная A, B, C, r.

3°. Доказать, что окружности $(A'SD)$, $(B'SE)$, $(C'SF)$ имеют общую радикальную ось.

4°. Доказать, что степени центра O окружности (ABC) относительно окружностей (ASD), (ESB), (CSF) равны между собой.

10. Пусть A — произвольная точка, не лежащая на окружности S с центром O. Проведем через точку A произвольную прямую, пересекающую окружность S в двух различных точках C и D. Введем на этой секущей систему координат, принимая точку A за начало координат. Пусть B — точка этой оси такая, что

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = -1 \qquad (1)$$

(говорят, что точка B гармонически сопряжена с точкой A относительно точек C и D). Доказать, что если ось вращается вокруг точки A, то точка B описывает прямую линию (эта прямая линия называется полярой a точки A относительно окружности S). Доказать, что если точка A лежит вне окружности S, то поляра a точки A пересекает окружность S в двух точках T_1 и T_2 таких, что AT_1 и AT_2—касательные к окружности S, проведенные из точки A (T_1 и T_2—точки прикосновения). Доказать, что если точка A лежит внутри окружности S, то поляра a точки A не пересекает окружность S.

Доказать, что если A'—точка пересечения поляры A с диаметром OA окружности S, то точка A' получается из точки A при инверсии относительно окружности C.

Пусть точка A лежит вне окружности S. Проведем через точку A две различные прямые. Пусть одна из них пересекает окружность S в точках C и D, а другая — в точках C_1 и D_1. Обозначим через P точку пересечения прямых CC_1 и DD_1 и через Q—точку пересечения прямых CD_1 и C_1D. Доказать, что если T_1 и T_2—точки, в которых прямая PQ пересекает окружность S, то AT_1 и AT_2—касательные, проведенные из A к окружности S.

Указание. Пусть M—середина отрезка AB. Из соотношения (1) следует:

$$\frac{\overline{AM}+\overline{MC}}{\overline{CM}+\overline{MB}}:\frac{\overline{AM}+\overline{MD}}{\overline{DM}+\overline{MB}}=-1$$

или, после упрощений:

$$\overline{MA}^2=\overline{MC}\cdot\overline{MD};$$

значит, точка M лежит на радикальной оси окружности S и нуль-окружность A. Точка B из точки A получается при гомотетии (A, 2) и т. д.

11. А. Пусть A, A' и F—три различные точки, лежащие на одной прямой (порядок безразличен). Обозначим через (C) окружность с диаметром AA', через O центр этой окружности, через (D) поляру точки F относительно окружности (C) и через I точку пересечения AA' с (D).

Пусть P—какая-нибудь точка прямой (D). Построить окружности (γ_1) и (γ_2), касающиеся в точке F прямой PF и касающиеся, кроме того окружности (C) в точках K_1 и K_2.

а) Доказать, что окружность с диаметром PF проходит через точки K_1 и K_2.

б) Пусть PK_1 и PK_2 пересекают (γ_1) и (γ_2) вторично в точках M_1 и M_2. Доказать, что отрезки PM_1 и PM_2 видны из точки I под прямым углом.

в) Пусть M_1M_2 пересекает (D) в точке Q; доказать, что окружность с диаметром M_1M_2 ортогональна окружности с диаметром FQ (можно использовать инверсию $(P,\ PF^2)$). Получить отсюда, что IF — биссектриса угла M_1IM_2.

B. Рассмотрим произвольную прямую (D) и фиксированную точку F. Обозначим проекцию точки F на прямую (D) через I. Пусть M — какая-нибудь точка плоскости. При инверсии с полюсом F и произвольной степенью γ окружность с диаметром MF переходит в прямую (γ'). Пусть I' и M' — образы точек I и M при этой инверсии, H — проекция точки M на (D), K' — проекция точки I' на (γ'). Доказать, что треугольники FIM и $FM'I$ подобны. Доказать, что треугольники HIM и $K'M'I'$ также подобны. Получить отсюда, что если отношение $MF:MH$ сохраняет постоянную величину (и при переменной точке M), то прямая (γ') остается касательной к некоторой фиксированной окружности.

C. Обратно: пусть дана фиксированная окружность (C) с центром O и фиксированная точка F. Пусть (D) — поляра F относительно (C), I — проекция F на (D). Рассмотрим переменную окружность (γ), проходящую через точку F и касающуюся (C) в точке K.

Рассмотрим инверсию с полюсом F, при которой окружность (C) переходит в себя. Во что переходит окружность (γ)? Доказать, что I переходит в O. Обозначим через H проекцию на (D) точки M, диаметрально противоположной точке F окружности (γ), а через K' и M' — образы точек K и M при указанной выше инверсии. Доказать, что треугольники FMI и FOM' подобны и что треугольники MIH и $OM'K'$ также подобны. Получить отсюда, что отношение $MH:MF$ не зависит от выбора окружности (γ).

Замечание. Разделы B и C можно решать независимо от раздела A.

12. Даны окружности (Γ) и (Γ'); R и R' — их радиусы, d — расстояние между их центрами O и O'; (γ) — образ (Γ) при инверсии $(O',\ R'^2)$ и (γ') — образ окружности (Γ') при инверсии $(O,\ R^2)$.

1°. Вычислить в функции R, R' и d радиусы r и r' окружностей (γ) и (γ'). Обозначим через ω и ω' центры этих двух окружностей; вычислить $\overline{O\omega}$ и $\overline{O'\omega'}$; положительное направление на прямой OO' устанавливается от O к O'.

2°. Доказать, что если $R \neq R'$, то из $r = r'$ следует или соотношение

$$d^2 = R^2 + R'^2 - RR', \tag{1}$$

или соотношение

$$d^2 = R^2 + R'^2 + RR'. \tag{2}$$

Сформулировать и доказать обратное положение. Доказать, что если выполнено любое из указанных выше соотношений, то окружности (Γ) и (Γ') пересекаются. Обозначая через A точку их пересечения, вычислить угол OAO'.

3°. Доказать, что если выполнено или соотношение (1), или соотношение (2), то окружности (γ) и (γ') совпадают. Вычислить в этом случае отношение $\overline{\omega O} : \overline{\omega O'}$ и указать, какое положение занимает при этом точка ω.

13. В плоскости задана окружность (C) с центром O и радиусом R.

1°. Пусть M — какая-нибудь точка плоскости, а (D) — какая-нибудь прямая, проходящая через M. Построить окружности (α) и (β), проходящие через точку M, касающиеся прямой (D) и окружности (C) (можно использовать инверсию с полюсом M). Пусть A и B — точки прикосновения с (C), доказать, что окружность (AML) ортогональна и к прямой (D), и к окружности (C).

2°. Пусть M' — точка, диаметрально противоположная точке M на окружности (ABM). Доказать, что геометрическое место точек M при условии, что прямая (D) вращается вокруг фиксированной точки, есть прямая (m). Каково при этих условиях геометрическое место точек пересечения касательных, проведенных к окружности (ABM) в точках A и B?

3°. Теперь предположим, что (D) — фиксированная прямая, проходящая на расстоянии $OH = \frac{R}{2}$ от точки O, и что точка M прямой (D) отстоит от точки H на расстоянии $HM = x$. Вычислить в функции R и x радиусы окружностей (α) и (β). Найти отношение их радиусов. Найти геометрическое место их центров.

14. Даны две окружности: (C_1) с центром O_1 и радиусом R_1 и окружность (C_2) с центром O_2 и радиусом R_2. Пусть в результате некоторой инверсии окружности (C_1) и (C_2) перейдут в окружности (C_1') и (C_2'). Обозначим через R_1' и R_2' радиусы окружностей (C_1') и (C_2') и через O_1' и O_2' их центры. Положим $O_1O_2=d$ и $O_1'O_2'=d'$. Доказать, что

$$\frac{d'^2-R_1'^2-R_2'^2}{R_1'R_2'}=\pm\frac{d^2-R_1^2-R_2^2}{R_1R_2}.$$

Уточнить выбор знака в правой части этого равенства.

15. 1°. В плоскости даны окружности (C) и (C') с центрами O и O' и радиусами R и R'. Пусть S — центр положительной гомотетии, переводящей одну из этих окружностей в другую. Обозначим через p и p' степени точки S относительно (C) и (C') (будем считать, что $p\neq 0$ и $p'\neq 0$); обозначим через k степень инверсии с полюсом S, которая окружность (C) преобразует в окружность (C'). Доказать, что

$$\frac{R'}{R}=\frac{k}{p}=\frac{p'}{k}.$$

2°. Даны три точки A, B и C, лежащие на одной прямой (C — между A и B). Обозначим через (AB), (BC), и (CA) полуокружности с диаметрами AB, BC и CA, расположенные по одну сторону от прямой ABC. Пусть (D) — прямая, перпендикулярная к AB в точке C. Рассмотрим окружность (I) с центром I, касающуюся одновременно (AB), (AC) и (D). Во что преобразуется окружность (I) при инверсии $(A, \overline{AB}\cdot\overline{AC})$? Во что преобразуется окружность (I) при инверсии $(B, \overline{BA}\cdot\overline{BC})$? Использовать полученные результаты для построения окружности (I) и точек прикосновения (I) с (AB), (AC) и (D).

3°. Решить те же вопросы для окружности (F), касающейся одновременно (AB), (CB) и (D).

4°. Положим $AB=2a$, $AC=2x$, $CB=2y$. Вычислить радиусы R_1 и R_2 окружностей (I) и (J), используя результаты пункта 1°.

Какой вывод можно отсюда сделать? Где должна находиться точка C для того, чтобы величины R_1 и R_2 имели максимальное значение? Чему равны эти максимальные значения?

ЛИТЕРАТУРА

1. Адамар Ж. Элементарная геометрия, тт. I, II. Учпедгиз, 1938 или любое другое издание. Книга содержит большой теоретический материал по геометрическим преобразованиям, а также много задач.
2. Ефимов Н. В. Высшая геометрия.
   В связи с тем что в настоящей статье уделено достаточно много внимания преобразованию инверсии, можно рекомендовать из книги Ефимова Н. В. прочитать материал, относящийся к той интерпретации геометрии Лобачевского, которая связана с преобразованием инверсии (интерпретация Пуанкаре).
3. Моденов П. С. и Пархоменко А. С. Геометрические преобразования. Изд-во МГУ, 1961.
   В книге дан теоретический материал по линейным и круговым преобразованиям.
4. Яглом И. М. Геометрические преобразования ГТТИ, т. 1, 1955; т. 2, 1956.
   В книге дан большой теоретический материал по геометрическим преобразованиям. Очень много разобранных задач и задач для самостоятельных упражнений.

Замечание. Уже после того, как была написана эта статья, учеником 2-й средней школы Октябрьского района Москвы Леней Шапиро (10 класс, 1969 г.) была доказана, вместо теоремы 3, сформулированной на странице 101, следующая исключительно интересная теорема: «Если при всяком взаимно однозначном преобразовании П евклидовой плоскости на себя четыре точки, принадлежащие одной окружности, переходят в четыре точки, также принадлежащие одной окружности, то П — подобие».

Статья Л. Шапиро принята к опубликованию в журнале «Математика в школе».

СОДЕРЖАНИЕ

Дополнительные главы
по курсу математики
9 класса
для факультативных занятий

Редактор Н. И. Никитина
Художественный редактор
В. С. Эрденко
Технический редактор О. Сёмина
Корректор Р. Б. Штутман

Сдано в набор 3/VI 1969 г. Подписано к печати 24/XI 1969 г. 84×108 1/32. Печ. л. 4,5. Условн. л. 7,56. Уч.-изд. л. 6,74. Тираж 300 тыс. экз. (Тем. пл. 1969 г. № 347.)

Издательство «Просвещение» Комитета по печати при Совете Министров РСФСР.
Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.
Заказ № 32

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография
имени А. А. Жданова
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР
Москва, М-54, Валовая, 28

Отпечатано с матриц в типографии № 1
управления по печати
Хабаровского крайисполкома,
г. Хабаровск, ул. Серышева, 31. Заказ № 155.
Цена 17 коп.

17 коп.

010